

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{x+4\sqrt{x}+4} : \left(\frac{x}{x+2\sqrt{x}} + \frac{x}{\sqrt{x}+2} \right)$ với $x > 0$. Tìm tất cả các giá trị của x để $A \geq \frac{1}{3\sqrt{x}}$.

b) Tính giá trị của biểu thức $B = \sqrt{x^2 - 6x + 9} + x$ với $x = 3 - \sqrt{3}$.

Câu 2. (2,0 điểm)

a) Nhà Huệ dự định trồng cây su hào trên một mảnh vườn được chia thành nhiều luống và mỗi luống sẽ được trồng một số lượng cây như nhau. Nếu tăng thêm 8 luống và mỗi luống trồng giảm đi 3 cây thì số cây toàn vườn giảm đi 54 cây so với dự định. Nếu giảm đi 4 luống và mỗi luống trồng nhiều hơn 2 cây thì số cây trong toàn vườn sẽ tăng thêm 32 cây so với dự định. Hỏi theo dự định nhà Huệ trồng bao nhiêu cây su hào trên mảnh vườn đó?

b) Giải phương trình $\sqrt{x+1} + \sqrt{4x-3} = x^2 - 4$.

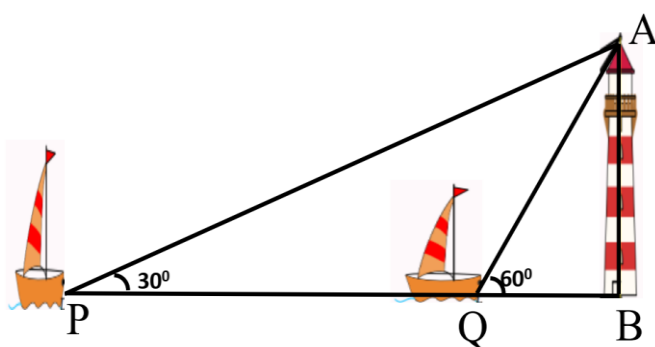
Câu 3. (1,5 điểm)

a) Từ một hộp có 30 thẻ được đánh số từ 1 đến 30, rút ngẫu nhiên hai thẻ. Tính xác suất để lấy được hai thẻ mà tích hai số trên hai thẻ là một số nguyên tố.

b) Từ tập hợp các số tự nhiên có ba chữ số, lấy ngẫu nhiên một số. Tính xác suất để số lấy được có tổng các chữ số chia hết cho 4.

Câu 4. (3,5 điểm)

1) Hai con thuyền P và Q cách nhau 150m và thẳng hàng với chân B của tháp hải đăng ở trên bờ biển. Từ P và Q người ta nhìn thấy đỉnh A của tháp hải đăng dưới các góc $BPA = 30^\circ$ và $BQA = 60^\circ$ (tham khảo hình vẽ bên). Tính chiều cao AB của tháp hải đăng.



2) Cho nửa đường tròn (O) , đường kính AB , lấy điểm C nằm trên nửa đường tròn (O) (C khác A và C khác B). Gọi K là trung điểm của dây cung BC . Qua B dựng tiếp tuyến với (O) và cắt OK tại D .

a) Chứng minh rằng AC song song với OK .

b) Chứng minh rằng DC là tiếp tuyến (O) .

c) Vẽ $CH \perp AB$ tại H . Gọi I là trung điểm của CH . Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt BI tại E . Chứng minh rằng ba điểm E, C, D thẳng hàng.

Câu 5. (1,0 điểm)

a) Tìm số nguyên dương n để $n^{2027} + n^{2026} + 1$ là số nguyên tố.

b) Có bao nhiêu số tự nhiên n không vượt quá 2025 sao cho $n^3 + 2025$ chia hết cho 6.

-----Hết-----

YÊU CẦU CHUNG

* Đáp án chỉ trình bày một lời giải cho mỗi bài. Trong bài làm của thí sinh yêu cầu phải lập luận logic chặt chẽ, đầy đủ, chi tiết và rõ ràng.

* Trong mỗi bài, nếu thí sinh giải sai ở bước giải trước thì cho điểm 0 đối với những bước giải sau có liên quan.

* Ở câu 4 ý 2 nếu thí sinh không vẽ hình thì cho 0 điểm.

* Điểm thành phần của mỗi bài nói chung phân chia đến 0,25 điểm. Đối với điểm thành phần là 0,5 điểm hoặc 0,75 điểm thì tùy tổ giám khảo thống nhất để chiết thành từng 0,25 điểm.

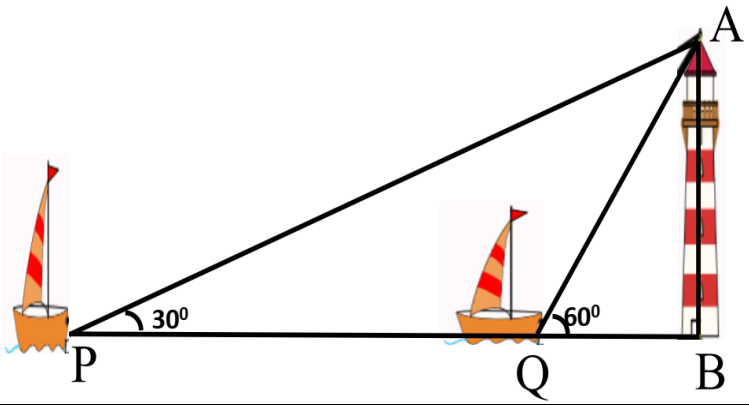
* Thí sinh có lời giải khác đáp án (nếu đúng) vẫn cho điểm tối đa tùy theo mức điểm của từng bài.

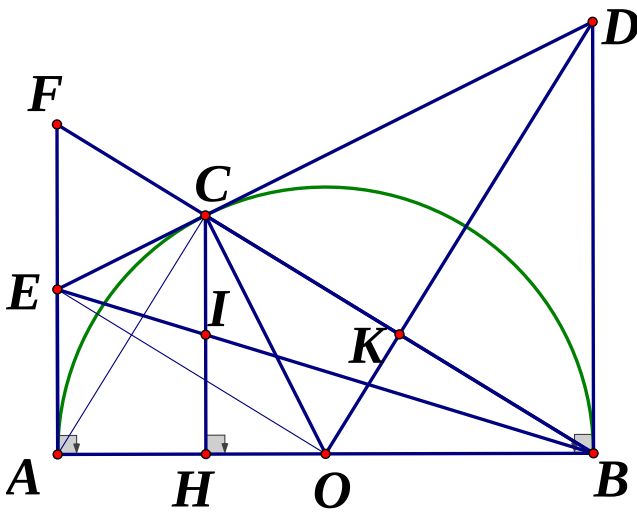
* Điểm của toàn bài là tổng (không làm tròn số) của điểm tất cả các bài.

Câu	Nội dung	Điểm
1	a) Cho biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x}+1}{x+4\sqrt{x}+4} : \left(\frac{x}{x+2\sqrt{x}} + \frac{x}{\sqrt{x}+2} \right); (x > 0)$. Tìm tất cả các giá trị của x để $A \geq \frac{1}{3\sqrt{x}}$	1,0
	ĐKXD: $x > 0$	0,25
	$A = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}$	0,25
	$A \geq \frac{1}{3\sqrt{x}}$ $\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} - \frac{1}{3\sqrt{x}} \geq 0$ $\frac{1-\sqrt{x}}{3\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \geq 0$ $1-\sqrt{x} \geq 0$ (Do $3\sqrt{x}(\sqrt{x}+2) > 0, \forall x > 0$). $x \leq 1$.	0,25
	Vậy $0 < x \leq 1$ thì $A \geq \frac{1}{3\sqrt{x}}$.	0,25
	b) Tính giá trị của biểu thức $B = \sqrt{x^2 - 6x + 9} + x$ với $x = 3 - \sqrt{3}$.	1,0
	Ta có $B = \sqrt{(x-3)^2} + x = x-3 + x$.	0,5
	Với $x = 3 - \sqrt{3}$, ta có $B = 3 - \sqrt{3} - 3 + (3 - \sqrt{3}) = 3$.	0,5

Câu	Nội dung	Điểm
2	a) Nhà Huệ dự định trồng cây su hào trên một mảnh vườn được chia thành nhiều luống và mỗi luống sẽ được trồng một số lượng cây như nhau. Nếu tăng thêm 8 luống và mỗi luống trồng giảm đi 3 cây thì số cây toàn vườn giảm đi 54 cây so với dự định. Nếu giảm đi 4 luống và mỗi luống trồng nhiều hơn 2 cây thì số cây trong toàn vườn sẽ tăng thêm 32 cây so với dự định. Hỏi theo dự định nhà Huệ trồng bao nhiêu cây su hào trên mảnh vườn đó?	1,0
	Gọi số luống là x (luống); $x \in \mathbb{N}^*$; $x > 4$ và số cây su hào trong mỗi luống là y (cây) $y \in \mathbb{N}^*$; $y > 3$.	0,25
	Sau khi tăng thêm 8 luống, mỗi luống giảm đi 3 cây thì số cây toàn vườn là $(x+8)(y-3)$ (cây). Vì số cây khi đó giảm so với ban đầu là 54 cây nên ta có phương trình $(x+8)(y-3) = xy - 54$ (1)	0,25
	Sau khi giảm đi 4 luống, mỗi luống trồng nhiều hơn 2 cây thì số cây toàn vườn là $(x-4)(y+2)$ (cây). Vì số cây khi đó nhiều hơn so với ban đầu là 32 cây nên ta có phương trình $(x-4)(y+2) = xy + 32$ (2)	0,25
	Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} (x+8)(y-3) = xy - 54 \\ (x-4)(y+2) = xy + 32 \end{cases}$ $\begin{cases} xy - 3x + 8y - 24 = xy - 54 \\ xy + 2x - 4y - 8 = xy + 32 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x - 8y = 30 \\ 2x - 4y = 40 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 50 \\ y = 15 \end{cases} \text{ (TMĐK).}$ Vậy nhà Huệ dự định trồng $50.15 = 750$ (cây su hào).	0,25
	b) Giải phương trình $\sqrt{x+1} + \sqrt{4x-3} = x^2 - 4$.	1,0
	Điều kiện: $x \geq \frac{3}{4}$	0,25
	$\sqrt{x+1} + \sqrt{4x-3} = x^2 - 4$ $\sqrt{x+1} - 2 + \sqrt{4x-3} - 3 = x^2 - 9$ $\frac{x-3}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{4(x-3)}{\sqrt{4x-3}+3} = (x-3)(x+3)$ $(x-3) \left(\frac{1}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{4}{\sqrt{4x-3}+3} - (x+3) \right) = 0$	0,25

Câu	Nội dung	Điểm
	$\begin{cases} x-3=0 \\ \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{4}{\sqrt{4x-3}+3} - (x+3) = 0 \end{cases}$	
	Trường hợp 1: $x-3=0$ $x=3$ (TM)	0,25
	Trường hợp 2: $\frac{1}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{4}{\sqrt{4x-3}+3} - (x+3) = 0$ $\frac{1}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{4}{\sqrt{4x-3}+3} = x+3 \quad (*)$ Với $x \geq \frac{3}{4}$ Ta có $VT = \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{4}{\sqrt{4x-3}+3} < \frac{1}{2} + \frac{4}{3} = \frac{11}{6} < \frac{3}{4} + 3 \leq x+3 = VP$ Phương trình (*) vô nghiệm. Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x=3$.	0,25
3	a) Từ một hộp có 30 thẻ được đánh số từ 1 đến 30, rút ngẫu nhiên hai thẻ. Tính xác suất để lấy được hai thẻ mà tích hai số trên hai thẻ là một số nguyên tố.	0,75
	Vì mỗi thẻ được đánh số khác nhau nên rút ngẫu nhiên hai thẻ thì số ghi trên hai thẻ không trùng nhau. Không gian mẫu có số phần tử là $\frac{30 \cdot 29}{2} = 435$. Các số nguyên tố từ 1 đến 30 là 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29. Có 10 kết quả thuận lợi.	0,5
	Xác suất để lấy được hai thẻ mà tích hai số trên hai thẻ là một số nguyên tố là $\frac{2}{87}$.	0,25
	b) Từ tập hợp các số tự nhiên có ba chữ số, lấy ngẫu nhiên một số. Tính xác suất để số lấy được có tổng các chữ số chia hết cho 4.	0,75
	Số phần tử của không gian mẫu: 900. Gọi số cần tìm $\overline{abc}$, $(a+b+c):4$ Xét $a+b=4k+r$, $r \in \{0;1;2;3\}$. Trường hợp 1: $r \in \{0;3\}$, có 3 cách chọn c . Trường hợp 2: $r \in \{1;2\}$, có 2 cách chọn c . Gọi A là tập hợp các số có dạng $4k+r$, $r \in \{1;2\}$.	0,25

Câu	Nội dung	Điểm
	Gọi B là tập hợp các số có dạng $4k+r, r \in \{0;3\}$.	
	Gọi X là biến cố “số lấy được có tổng các chữ số chia hết cho 4” Gọi S là tập hợp các số có tổng các chữ số chia hết cho 4. Khi đó: $S =2 A +3 B =2(A + B)+ B =2.9.10+ B =180+ B$ Tính B Nếu $\overline{ab}$ có dạng $a+b=4k$ thì ta có 22 số. Nếu $\overline{ab}$ có dạng $a+b=4k+3$ thì ta có 22 số. Suy ra $B =22+22=44$. Khi đó $S =180+44=224$ suy ra $n(X)= S =224$.	0,25
	Xác suất để số lấy được có tổng các chữ số chia hết cho 4 là $P(X)=\frac{224}{900}=\frac{56}{225}.$	0,25
4	1) Hai con thuyền P và Q cách nhau 150m và thẳng hàng với chân B của tháp hải đăng ở trên bờ biển. Từ P và Q người ta nhìn thấy đỉnh A của tháp hải đăng dưới các góc $BPA=30^\circ$ và $BQA=60^\circ$ (tham khảo hình vẽ). Tính chiều cao AB của tháp hải đăng. 	0,5
	Trong $\triangle ABP$ có $AB=PB.\tan BPA=(PQ+QB)\tan 30^\circ$. Trong $\triangle AQP$ có $AB=QB.\tan BQA=QB.\tan 60^\circ$.	0,25
	Ta có: $PQ.\tan 30^\circ + QB.\tan 30^\circ = QB.\tan 60^\circ \text{ nên } QB = \frac{PQ.\tan 30^\circ}{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ}.$ $\text{Suy ra } AB = \frac{PQ.\tan 30^\circ}{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ} \cdot \tan 60^\circ = \frac{150 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{3} = 75\sqrt{3}.$ Vậy $AB=75\sqrt{3}$ m.	0,25
	2) Cho nửa đường tròn (O), đường kính AB, lấy điểm C nằm trên nửa đường tròn (O) (C khác A và C khác B). Gọi K là trung điểm của dây cung BC. Qua B dựng tiếp tuyến với (O) và cắt OK tại D. a) Chứng minh rằng AC song song với OK. b) Chứng minh rằng DC là tiếp tuyến (O). c) Vẽ $CH \perp AB$ tại H. Gọi I là trung điểm của CH. Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt BI tại E. Chứng minh rằng ba điểm E, C, D	3,0

Câu	Nội dung	Điểm
	thẳng hàng.	
		0,5
	a) Chứng minh $AC \parallel OK$. Do K là trung điểm BC nên $OK \perp BC$ (1) ΔACB có CO là đường trung tuyến và $CO = \frac{1}{2} AB$ nên ΔACB vuông tại C hay $AC \perp BC$ (2) Từ (1) và (2) suy ra $AC \parallel OK$ (cùng vuông góc với BC)	0,75
	b) Ta có $\Delta OCK = \Delta OBK$ (c.c.c) nên $COK = BOK$ hay $COD = BOD$. Xét ΔOCD và ΔOBD có $OC = OB$; $COD = BOD$; OD cạnh chung nên $\Delta OCD = \Delta OBD$ (c.g.c) suy ra $OCD = OBD$ mà $OBD = 90^\circ$ (BD là tiếp tuyến) nên $OCD = 90^\circ$ hay $OC \perp CD$ tại C. Vậy CD là một tiếp tuyến của nửa đường tròn (O).	0,75
	c) Gọi F là giao điểm của BC và AE. Ta có $\Delta HBI \sim \Delta ABE$ (g.g) suy ra $\frac{IB}{EB} = \frac{IH}{EA}$ (3) $\Delta CBI \sim \Delta FBE$ (g.g) suy ra $\frac{IB}{EB} = \frac{IC}{EF}$ (4)	0,25
	Từ (3), (4) và $IH = IC$ (gt) suy ra $EA = EF$ Xét ΔABF có $EA = EF$, $OA = OB$ nên OE là đường trung bình của tam giác suy ra $OE \parallel BF$. Mà $AC \perp BF$ nên $AC \perp OE$ suy ra $AOE = COE$. Do đó $\Delta OAE = \Delta OCE$ (c.g.c) suy ra $OAE = OCE = 90^\circ$.	0,5
	Khi đó $OCE + OCD = 180^\circ$ suy ra ba điểm E, C, D thẳng hàng.	0,25
5	a) Tìm số nguyên dương n để $n^{2027} + n^{2026} + 1$ là số nguyên tố.	0,5
	Ta có $n^{2027} + n^{2026} + 1 = n^2(n^{2025} - 1) + n(n^{2025} - 1) + n^2 + n + 1$	0,25
	Với $n > 1$ ta có $(n^{2025} - 1) : (n^3 - 1) : n^2 + n + 1$ Do đó $(n^{2027} + n^{2026} + 1) : n^2 + n + 1$ và $n^{2027} + n^{2026} + 1 > n^2 + n + 1 > 1$ nên $n^{2027} + n^{2026} + 1$ là hợp số.	0,25

Câu	Nội dung	Điểm
	Với $n=1$ thì $n^{2027} + n^{2026} + 1 = 3$ là số nguyên tố. Vậy $n=1$ là số cần tìm.	
	b) Có bao nhiêu số tự nhiên n không vượt quá 2025 thỏa mãn $n^3 + 2025$ chia hết cho 6.	0,5
	Đặt $n = 6q + r, r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Khi đó $n^3 + 2025$ chia hết cho 6 khi $r^3 + 3$ chia hết cho 6. Nếu r chẵn thì $r^3 + 3$ lẻ, do đó $r^3 + 3$ không chia hết cho 6. Suy ra $r \in \{1, 3, 5\}$.	0,25
	Với $r = 1 \Rightarrow r^3 + 3 = 4$ không chia hết cho 6. Với $r = 3 \Rightarrow r^3 + 3 = 30 : 6$. Với $r = 5 \Rightarrow r^3 + 3 = 128$ không chia hết cho 6. Suy ra $n = 6q + 3$. Mà $0 \leq n \leq 2025 \Rightarrow 0 \leq q \leq 337$. Vậy có tất cả 338 số tự nhiên n thỏa mãn đề bài.	0,25