SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi gồm 01 trang)

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP THÀNH PHỐ
NĂM HỌC 2022 - 2023
MÔN: TOÁN
Ngày thi: 14/3/2023
Thời gian làm bài: 120 phút (*không tính thời gian phát đề*)

Câu 1. (3 *điểm*) Cho hai số thực a, b thỏa mãn các điều kiện $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=1$ và $\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}-\dfrac{1}{a+b}=\dfrac{1}{2}$. Tính giá trị của biểu thức $P=a^4+b^4$.

Câu 2. (4 *điểm*) Cho phương trình $x^3+mx^2-x+m-m^2=0$ (*) với tham số m.

a) Chứng minh rằng phương trình (*) luôn có một nghiệm $x=1-m$ với mọi giá trị của tham số m.

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 sao cho $x_1^2+x_2^2+x_3^2=3$.

Câu 3. (4 *điểm*) Cho tam giác ABC không cân nội tiếp đường tròn (O) có đường cao AD; AM là đường kính của đường tròn (O); K là hình chiếu của B lên AM. Gọi E, F lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng BD và CM.

a) Chứng minh rằng DK vuông góc AC.

b) Chứng minh rằng $AEFC$ là tứ giác nội tiếp.

c) Gọi H là trực tâm của tam giác AEC và I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AEFC$. Chứng minh rằng $HE=2IO$.

Câu 4. (3 *điểm*) Cho a, b, c là các số thực dương . Chứng minh các bất đẳng thức dưới đây

a) $\dfrac{(a+1)^2}{a^2+1}\le 2$.

b) $\dfrac{1}{a^2+b^2+2}+\dfrac{1}{b^2+c^2+2}+\dfrac{1}{c^2+a^2+2}\le\dfrac{1}{(a+1)^2}+\dfrac{1}{(b+1)^2}+\dfrac{1}{(c+1)^2}$.

Câu 5. (3 *điểm*) Cho tam giác ABC có $\widehat{A}=2\widehat{B}$. Chứng minh rằng $BC^2=AB.AC+AC^2$.

Câu 6. (3 *điểm*) Tìm tất cả các số tự nhiên x, y và số nguyên tố p sao cho $p^x=y^4+64$.

---------------- **HẾT** ----------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP THÀNH PHỐ
NĂM HỌC 2022 - 2023
MÔN: TOÁN

HƯỚNG DẪN CHẤM

Câu 1. (3 *điểm*) Cho hai số thực a, b thỏa mãn các điều kiện sau $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$ và $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}-\frac{1}{a+b}=\frac{1}{2}$. Tính giá trị của biểu thức $P=a^4+b^4$.

Giải.

Từ điều kiện $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1 \Rightarrow a+b=ab$

Từ điều kiện $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}-\frac{1}{a+b}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a+b+2}{ab+a+b+1}-\frac{1}{a+b}=\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \frac{ab+2}{2ab+1}-\frac{1}{ab}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{ab+2}{2ab+1}=\frac{ab+2}{2ab} \Rightarrow ab=-2$$

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=8$$

$$P=a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2(ab)^2=56.$$

Câu 2. (4 *điểm*) Cho phương trình $x^3+mx^2-x+m-m^2=0$ (*) với tham số m.

Giải.

a) Chứng minh rằng phương trình (*) luôn có một nghiệm $x=1-m$ với mọi giá trị của tham số m. **(1 *điểm*)**

Thay $x=1-m$ vào phương trình (*) $\Rightarrow (1-m)^3+m(1-m)^2-(1-m)+m-m^2=0$

$$\Leftrightarrow 0=0 \text{ (luôn đúng)}$$

Vậy phương trình (*) luôn có một nghiệm $x=1-m$ với mọi giá trị của tham số m.

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 sao cho $x_1^2+x_2^2+x_3^2=3$. **(3 *điểm*)**

$$(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1-m \\ x^2+x-m=0 \end{array}\right.$$

Điều kiện để phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt là $m>-\frac{1}{4}$ và $m \neq 2 \pm \sqrt{2}$.

Khi đó $x_1 = 1 - m$; $x_2 + x_3 = -1$; $x_2 x_3 = -m$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 3 \Leftrightarrow x_1^2 + (x_2 + x_3)^2 - 2x_2x_3 = 3$$
$$\Leftrightarrow (1-m)^2 + 1 + 2m = 3 \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$$

So với điều kiện có nghiệm ta nhận $m = 1$.

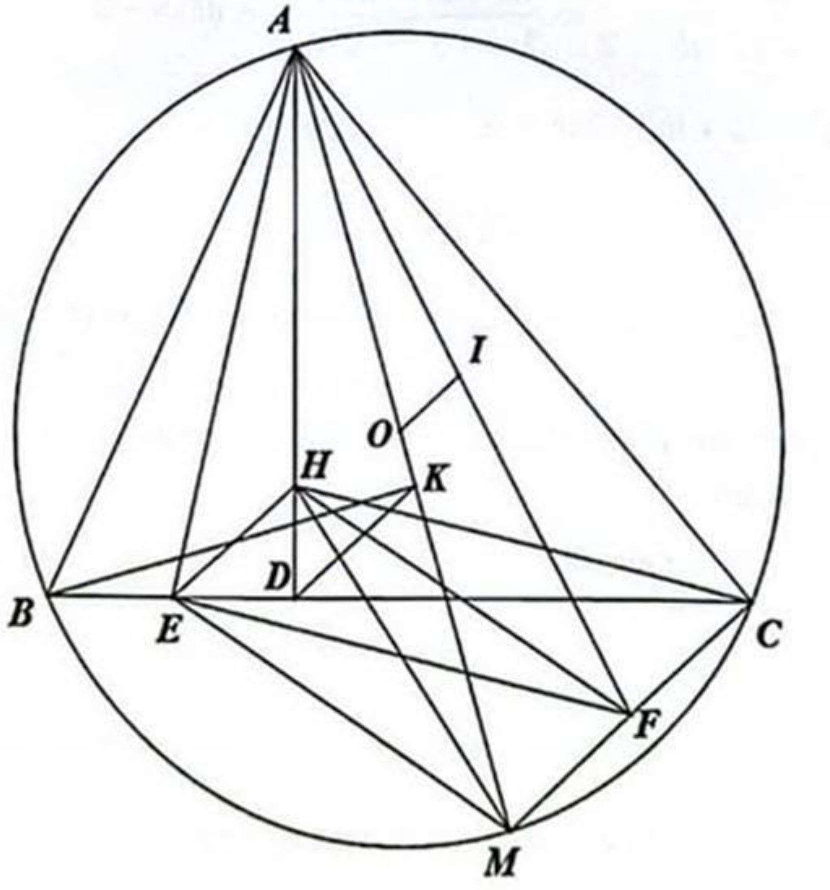
Câu 3. (4 *điểm*) Cho tam giác ABC không cân nội tiếp đường tròn (O) có đường cao AD; AM là đường kính của đường tròn (O); K là hình chiếu của B lên AM. Gọi E, F lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng BD và CM.

a) Chứng minh rằng DK vuông góc AC.

b) Chứng minh rằng $AEFC$ là tứ giác nội tiếp.

c) Gọi H là trực tâm của tam giác AEC và I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AEFC$. Chứng minh rằng $HE = 2IO$.

Giải.



a) Chứng minh DK vuông góc với AC. (**1 *điểm***)

Ta có tứ giác $ABDK$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{KDC} = \widehat{BAM}$

$\widehat{BAM} = \widehat{BCM} \Rightarrow \widehat{KDC} = \widehat{BCM} \Rightarrow DK // MC$

Mặt khác $MC \perp AC \Rightarrow DK \perp AC$.

b) Chứng minh rằng $AEFC$ là tứ giác nội tiếp đường tròn tâm I. **(1 điểm)**

Ta có $\Delta ABD \backsim \Delta AMC$

$\Rightarrow \Delta AED \backsim \Delta AFC$

$\Rightarrow \widehat{AED} = \widehat{AFC}$

$\Rightarrow AEFC$ nội tiếp đường tròn tâm I là trung điểm của AF.

c) Gọi H là trực tâm tam giác AEC. Chứng minh rằng $HE = 2IO$. **(2 điểm)**

Ta có $\begin{cases} HE \perp AC \\ FC \perp AC \end{cases} \Rightarrow HE//FC$

$\begin{cases} HC \perp AE \\ EF \perp AE \end{cases} \Rightarrow HC//EF$

Suy ra $HEFC$ là hình bình hành.

Suy ra $HEMF$ là hình bình hành $\Rightarrow HE = MF$

Mà $IO = \dfrac{MF}{2} \Rightarrow HE = 2IO.$

Câu 4. **(3 *điểm*)** Cho a, b, c là các số thực dương . Chứng minh các bất đẳng thức dưới đây

a) $\dfrac{(a+1)^2}{a^2+1} \le 2.$

b) $\dfrac{1}{a^2+b^2+2} + \dfrac{1}{b^2+c^2+2} + \dfrac{1}{c^2+a^2+2} \le \dfrac{1}{(a+1)^2} + \dfrac{1}{(b+1)^2} + \dfrac{1}{(c+1)^2}.$

Giải.

a) $\dfrac{(a+1)^2}{a^2+1} \le 2 \Leftrightarrow (a+1)^2 \le 2(a^2+1) \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 \ge 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 \ge 0$ **(1 điểm)**

b) **(2 điểm)**

Từ câu a) ta có các bất đẳng thức sau: $\dfrac{1}{a^2+1} \le \dfrac{2}{(a+1)^2}; \dfrac{1}{b^2+1} \le \dfrac{2}{(b+1)^2}; \dfrac{1}{c^2+1} \le \dfrac{2}{(c+1)^2};$

$$\frac{1}{a^2+b^2+2}=\frac{1}{a^2+1+b^2+1}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}\right)$$
$$\le\frac{1}{4}\left(\frac{2}{(a+1)^2}+\frac{2}{(b+1)^2}\right)=\frac{1}{2(a+1)^2}+\frac{1}{2(b+1)^2}$$

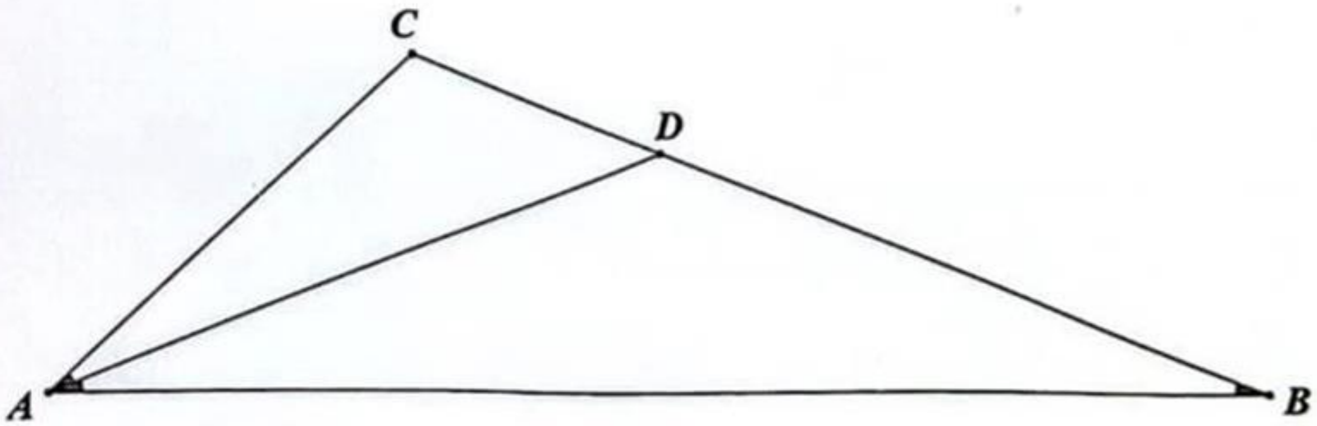
Chứng minh tương tự ta được

$$\frac{1}{b^2+c^2+2}\le\frac{1}{2(b+1)^2}+\frac{1}{2(c+1)^2};\quad \frac{1}{c^2+a^2+2}\le\frac{1}{2(c+1)^2}+\frac{1}{2(a+1)^2}.$$

Cộng vế theo vế 3 bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh.

Câu 5. (3 *điểm*) Cho tam giác ABC có $\widehat{A}=2\widehat{B}$. Chứng minh rằng $BC^2=AB.AC+AC^2$.

Giải.



Kẻ đường phân giác trong AD của tam giác ABC.

Ta có $\widehat{CDA}=\widehat{DAB}+\widehat{DBA}=2\widehat{DAB}=\widehat{CAB}$

Suy ra $\Delta ACD \backsim \Delta BCA \Rightarrow AC^2=CD.BC$

Mặt khác, AD là đường phân giác trong của tam giác ABC nên

$$\frac{CD}{DB}=\frac{AC}{AB}\Rightarrow\frac{CD}{BC}=\frac{AC}{AC+AB}\Rightarrow CD=\frac{AC.BC}{AC+AB}$$

Từ đó $AC^2=CD.BC=\dfrac{AC.BC^2}{AC+AB}\Rightarrow BC^2=AC(AC+AB)=AB.AC+AC^2$.

Câu 6. (3 *điểm*) Tìm tất cả các số tự nhiên x, y và số nguyên tố p sao cho $p^x = y^4 + 64$.

Giải.

Cách 1

Dễ thấy $x = 0$ không thỏa mãn . Suy ra x là số nguyên dương.

Ta có $y^4 + 64 = p^x \Leftrightarrow \left(y^2 - 4y + 8\right)\left(y^2 + 4y + 8\right) = p^x$

- Trường hợp 1. $p = 2$ suy ra $y^4 + 64 = 2^x$, dễ thấy y là số chẵn.

+ Nếu $x \le 5$ thì $2^x \le 2^5 = 32 < y^4 + 64$ (vô lý).
+ Nếu $x = 6$ thì $y = 0$.
+ Nếu $x > 6$ thì $2^x \vdots 128$ suy ra $y^4 + 64 \vdots 128$

Xét $y = 4k\left(k \in \mathbb{N}^*\right) \Rightarrow y^4 \vdots 128$ nên $64 \vdots 128$ (vô lý).

Xét $y = 4k + 2\left(k \in \mathbb{N}^*\right) \Rightarrow y^2 = 16l + 4 \Rightarrow y^4 = 256l^2 + 128l + 16\left(l \in \mathbb{N}^*\right)$

$\Rightarrow y^4 + 64 = 256l^2 + 128l + 80$ nên $80 \vdots 128$ (vô lý).

Suy ra không tồn tại x, y.

- Trường hợp 2. p là số nguyên tố $\ne 2$ khi đó p là số lẻ $\Rightarrow y^4 + 4$ là số lẻ $\Rightarrow y$ là số lẻ

Xét ước chung lớn nhất của

$\left(y^2 - 4y + 8; y^2 + 4y + 8\right) = \left(y^2 - 4y + 8; 8y\right) = \left(y^2 - 4y + 8; y\right) = \left(8; y\right) = 1$

Suy ra

$+\begin{cases} y^2 - 4y + 8 = 1 \\ y^2 + 4y + 8 = p^x \end{cases}$ (vô nghiệm)

$+\begin{cases} y^2 - 4y + 8 = p^x \\ y^2 + 4y + 8 = 1 \end{cases}$ (vô nghiệm)

Vậy $\left(x; y; p\right) = \left(6; 0; 2\right)$.

--------------- **HẾT** ---------------