SỞ GD&ĐT VĨNH PHÚC

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2024-2025

MÔN: TOÁN

Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Câu 1 (6,0 điểm)

a) Giải phương trình: $\frac{1}{x^2-x-2}+\frac{3}{x^2+3x-2}=\frac{1}{x}$.

b) Theo khuyến nghị, khối lượng cặp sách của học sinh THCS không vượt quá 10% khối lượng cơ thể. Bạn A là học sinh lớp 9 nặng 50 kg. Hằng ngày, bạn A đi học mang một chiếc cặp nặng 3,5 kg. Hôm nay, bạn A cần đem thêm một số quyển vở, mỗi quyển nặng 200 g để tặng học sinh vùng núi. Gọi y là tổng khối lượng của cặp sách (đơn vị kg) sau khi bạn A mang thêm x quyển vở. Thiết lập hàm số liên hệ giữa y và x. Theo khuyến nghị, bạn A có thể mang thêm nhiều nhất bao nhiêu quyển vở?

c) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy+2x+y=2 \\ x^2+y^2+2x+4y=3 \end{cases}$.

Câu 2 (3,0 điểm)

a) Cho a, b là các số thực thỏa mãn $\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)\left(b+\sqrt{1+b^2}\right)=1$. Tính giá trị của biểu thức: $T=a^3+b^3+2025$.

b) Tìm các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn: $3x^2-18y^2+2z^2+3y^2z^2-18x=27$.

Câu 3 (3,0 điểm)

a) Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^{2025}}{b+c-a}+\frac{b^{2025}}{c+a-b}+\frac{c^{2025}}{a+b-c}\geq a^{2024}+b^{2024}+c^{2024}.$$

b) Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a>b>c$, $ab+bc+ca>0$ và $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{a-c}+\frac{5}{2\sqrt{ab+bc+ca}}$.

Câu 4 (6,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Đường thẳng qua B và song song với CF cắt tia AD tại K.

a) Chứng minh rằng ΔAEF đồng dạng ΔABC.

b) Chứng minh $AB^2=AD.AK$ và $\frac{HD}{AD}+\frac{HE}{BE}+\frac{HF}{CF}=1$.

c) Gọi I là trung điểm của BC, tia HI cắt BK tại N. Chứng minh AN vuông góc với EF.

Câu 5 (2,0 điểm). Bên trong hình vuông cạnh bằng 1, lấy 9 điểm phân biệt tùy ý sao cho không có bất kỳ 3 điểm nào trong chúng thẳng hàng. Chứng minh rằng tồn tại 3 điểm trong số đó tạo thành một tam giác có diện tích không vượt quá $\frac{1}{8}$.

.....HẾT.....

Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:.....; Số báo danh.....