

Bài 1 (6,0 điểm). Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{2+5\sqrt{x}}{4-x}$.

a. Rút gọn biểu thức A .

b. Tìm x để $A = \frac{3}{4}$.

c. Tìm tất cả các giá trị của x để giá trị của biểu thức A là số nguyên.

Bài 2 (3,0 điểm). Cho phương trình $x^2 - (2m+3)x + m = 0$ (với m là tham số).

a. Chứng minh rằng phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m .

b. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $(x_1^2 + x_2^2)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 3 (4,0 điểm).

a. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $n^4 + 4^n$ là số nguyên tố.

b. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $20y^2 - 6xy + 15x = 150$.

Bài 4 (6,0 điểm). Cho tam giác ABC vuông cân tại A có AH là đường cao. Trên đoạn thẳng HC lấy điểm M ($M \neq H, M \neq C$). Gọi I, J lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ M đến các cạnh AC và AB ; N là điểm đối xứng của M qua đường thẳng IJ .

a. Chứng minh rằng các điểm A, J, M, I, N cùng thuộc một đường tròn.

b. Chứng minh rằng điểm N thuộc đường tròn đường kính BC .

c. Đường thẳng AM cắt đường tròn đường kính BC tại điểm P ($P \neq A$).

Chứng minh rằng $\frac{BC}{AB} = \frac{PM}{PC} + \frac{PM}{PB}$.

d. Gọi D là trung điểm của đoạn thẳng AH . Kẻ HK vuông góc với CD tại điểm K . Chứng minh rằng $\widehat{BAK} = \widehat{KHC}$.

Bài 5 (1,0 điểm). Xét tất cả các số thực x, y, z không âm và thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = xy + yz + zx - 2xyz$.

----- Hết -----

(Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm)

Họ và tên..... SBD.....

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI MÔN TOÁN

I. Hướng dẫn chung

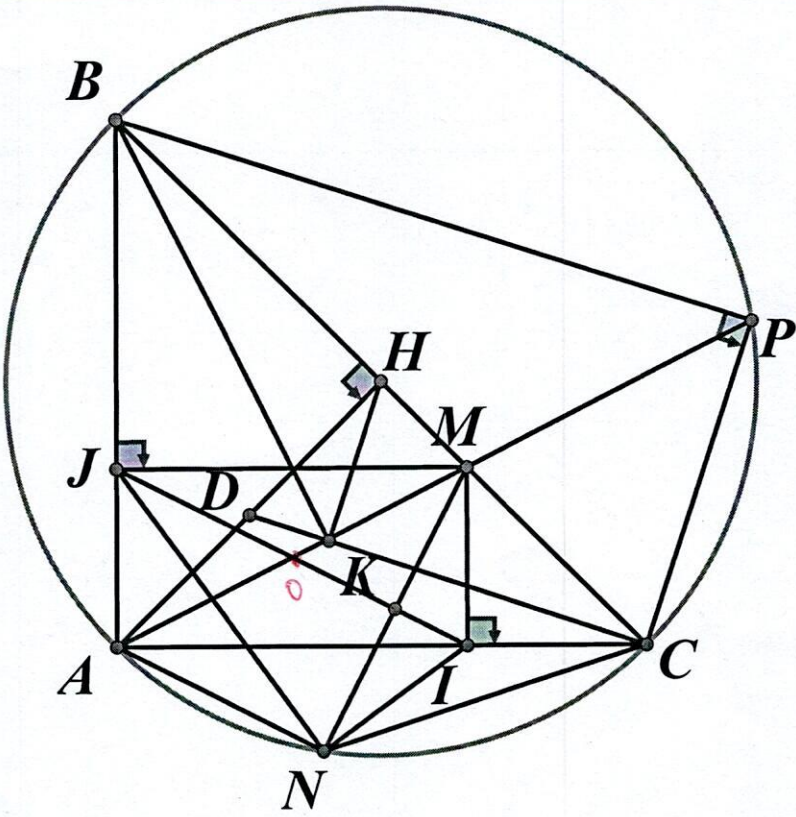
- 1) Nếu học sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án nhưng đúng thì cho đủ số điểm từng phần như hướng dẫn quy định.
- 2) Việc chi tiết hóa (nếu có) thang điểm trong hướng dẫn chấm phải bảo đảm không làm sai lệch hướng dẫn chấm và phải được thống nhất thực hiện trong tổ chấm.

II. Đáp án và thang điểm

Bài	Nội dung	Điểm
Bài 1 (6đ)	Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{2+5\sqrt{x}}{4-x}$. a. Rút gọn biểu thức A .	3.0
	Điều kiện xác định của biểu thức A là: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 4 \end{cases}$.	0.5
	$A = \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2) + 2\sqrt{x}(\sqrt{x}-2) - (2+5\sqrt{x})}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$	1.0
	$= \frac{x+3\sqrt{x}+2+2x-4\sqrt{x}-2-5\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$	0.5
	$= \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$	0.5
	$= \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$	0.5
	b. Tìm x để $A = \frac{3}{4}$.	1.5
	Ta có $A = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} = \frac{3}{4}$	0.5
	$\Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{2}{3}$	0.5
	$\Leftrightarrow x = \frac{4}{9} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$	0.5

Bài	Nội dung	Điểm
	c. Tìm tất cả các giá trị của x để giá trị của biểu thức A là số nguyên.	1.5
	Ta có $A = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} = 3 - \frac{6}{\sqrt{x}+2}$.	0.25
	Vì $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 4 \end{cases}$ nên $0 \leq A < 3$. Theo bài ra, giá trị của biểu thức A là số nguyên nên ta xét các trường hợp sau:	0.25
	$A = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (thỏa mãn).	0.25
	$A = 1 \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} = 1 \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn).	0.25
	$A = 2 \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} = 2 \Leftrightarrow x = 16$ (thỏa mãn).	0.25
	Vậy các giá trị của x để giá trị của biểu thức A là số nguyên là: 0; 1; 16.	0.25
	Cho phương trình $x^2 - (2m+3)x + m = 0$ (với m là tham số). a. Chứng minh rằng phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m .	1.5
	Ta có $\Delta = (2m+3)^2 - 4m = 4m^2 + 12m + 9 - 4m$	0.5
	$= 4m^2 + 8m + 9$	0.5
	$= (2m+2)^2 + 5 > 0$ ($\forall m$). Vậy phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m .	0.5
	b. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $(x_1^2 + x_2^2)$ đạt giá trị nhỏ nhất.	1.5
Bài 2 (3đ)	Áp dụng định lý Viet đối với phương trình đã cho ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 3 \\ x_1 x_2 = m \end{cases}$	0.25
	Ta có $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$	0.25
	$= (2m+3)^2 - 2m = 4m^2 + 12m + 9 - 2m$	0.25
	$= 4m^2 + 10m + 9$	0.25
	$= \left(2m + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} \geq \frac{11}{4}$ ($\forall m$).	0.25
	Vậy $(x_1^2 + x_2^2)$ đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{11}{4} \Leftrightarrow m = -\frac{5}{4}$.	0.25

Bài	Nội dung	Điểm
Bài 3 (4đ)	a. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $n^4 + 4^n$ là số nguyên tố.	2.0
	Xét $n=1$, ta có $n^4 + 4^n = 5$. Vậy $n=1$ thỏa mãn.	0.5
	Xét $n > 1$. - Nếu n là số chẵn thì $(n^4 + 4^n):2$ và $n^4 + 4^n > 2$ nên $n^4 + 4^n$ là hợp số. Vậy $n > 1$ và n là số chẵn không thỏa mãn.	0.5
	- Nếu n là số lẻ, ta đặt $n = 2k + 1 (k \in \mathbb{N}^*)$. Ta có:	0.25
	$n^4 + 4^n = (n^2)^2 + (4^k \cdot 2)^2 = (n^2 + 4^k \cdot 2)^2 - 2 \cdot n^2 \cdot 4^k \cdot 2$	0.25
	$= (n^2 + 4^k \cdot 2)^2 - (2n \cdot 2^k)^2 = (n^2 - 2n \cdot 2^k + 4^k \cdot 2)(n^2 + 2n \cdot 2^k + 4^k \cdot 2)$	0.25
	Vì $\begin{cases} n^2 - 2n \cdot 2^k + 2 \cdot 4^k \neq n^2 + 2n \cdot 2^k + 2 \cdot 4^k \\ n^2 - 2n \cdot 2^k + 2 \cdot 4^k > 1 \\ n^2 + 2n \cdot 2^k + 2 \cdot 4^k > 1 \end{cases}$ nên $n^4 + 4^n$ là hợp số. Vậy $n > 1$ và n là số lẻ không thỏa mãn.	0.25
	Tóm lại $n=1$ thỏa mãn bài toán.	0.25
	b. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $20y^2 - 6xy + 15x = 150$.	2.0
	Phương trình $20y^2 - 6xy = 150 - 15x \Leftrightarrow 6xy - 15x = 20y^2 - 150$ $\Leftrightarrow 3x(2y - 5) = 5(4y^2 - 25) - 25 \Leftrightarrow (2y - 5)(10y + 25 - 3x) = 25$ Vì x, y là các số nguyên nên ta xét các trường hợp sau:	0.25
	TH1: $\begin{cases} 2y - 5 = 1 \\ 10y + 25 - 3x = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 3 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$	0.25
	TH2: $\begin{cases} 2y - 5 = -1 \\ 10y + 25 - 3x = -25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{70}{3} \\ y = 2 \end{cases} \text{ (không thỏa mãn).}$	0.25
	TH3: $\begin{cases} 2y - 5 = 25 \\ 10y + 25 - 3x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 58 \\ y = 15 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$	0.25
	TH4: $\begin{cases} 2y - 5 = -25 \\ 10y + 25 - 3x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -10 \\ x = \frac{-74}{3} \end{cases} \text{ (không thỏa mãn).}$	0.25
	TH5: $\begin{cases} 2y - 5 = -5 \\ 10y + 25 - 3x = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 0 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$	0.25

Bài	Nội dung	Điểm
	$TH6: \begin{cases} 2y - 5 = 5 \\ 10y + 25 - 3x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{70}{3} \\ y = 5 \end{cases} \text{ (không thỏa mãn).}$	0.25
	Vậy phương trình đã cho có các nghiệm nguyên $(x; y)$ thỏa mãn là: $(10; 3); (58; 15); (10; 0)$.	0.25
Bài 4 (6đ)	 Chú ý: Nếu không vẽ hình thì không cho điểm toàn bài	0.5
	a. Chứng minh rằng các điểm A, J, M, I, N cùng thuộc một đường tròn.	1.5
	Ta có: $\widehat{AJM} = \widehat{AIM} = \widehat{JAI} = 90^\circ$ (giả thiết), suy ra tứ giác $AIMJ$ là hình chữ nhật. Do đó tứ giác $AIMJ$ nội tiếp đường tròn đường kính AM và IJ .	0.5
	Vì N đối xứng với M qua IJ nên $\widehat{JNI} = \widehat{JMI} = 90^\circ$.	0.5
	Vậy $\widehat{JAI} = \widehat{JNI} = \widehat{JMI} = 90^\circ$. Suy ra, các điểm A, J, M, I, N cùng thuộc đường tròn đường kính IJ .	0.5
	b. Chứng minh rằng điểm N thuộc đường tròn đường kính BC .	2.0
	Từ ý a, suy ra $\widehat{ANM} = 90^\circ$.	0.5

Bài	Nội dung	Điểm
	Xét $\triangle MIC$ ta có $\begin{cases} \widehat{MIC} = 90^\circ \\ \widehat{MCI} = 45^\circ \end{cases}$. Suy ra $\triangle MIC$ vuông cân tại I Suy ra $IM = IC$.	0.5
	Vì N đối xứng với M qua IJ nên $IM = IN$. Vậy $IM = IN = IC$. Do đó, I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle MIC$. Suy ra $\widehat{MNC} = \frac{1}{2}\widehat{MIC} = 45^\circ$.	0.5
	Do đó $\widehat{ABC} + \widehat{ANC} = 45^\circ + 90^\circ + 45^\circ = 180^\circ$. Suy ra các điểm A, B, C, N cùng thuộc một đường tròn. Do đó điểm N thuộc đường tròn đường kính BC.	0.5
	c. Đường thẳng AM cắt đường tròn đường kính BC tại điểm $P (P \neq A)$. Chứng minh rằng $\frac{BC}{AB} = \frac{PM}{PC} + \frac{PM}{PB}$.	1.0
	Xét $\triangle MPC$ và $\triangle MBA$ ta có: $\widehat{CMP} = \widehat{AMB}$ (đối đỉnh). $\widehat{MPC} = \widehat{APC} = \widehat{ABC} = \widehat{MBA} = \frac{1}{2}\text{sđ } \widehat{AC}$. Suy ra $\triangle MPC$ đồng dạng $\triangle MBA$. Suy ra $\frac{PM}{MB} = \frac{PC}{BA} \Rightarrow \frac{PM}{PC} = \frac{MB}{BA}$ (1).	0.25
	Xét $\triangle MBP$ và $\triangle MAC$ ta có: $\widehat{AMC} = \widehat{BMP}$ (đối đỉnh). $\widehat{MAC} = \widehat{PAC} = \widehat{PBC} = \widehat{PBM} = \frac{1}{2}\text{sđ } \widehat{PC}$. Suy ra $\triangle MBP$ đồng dạng $\triangle MAC$. Suy ra $\frac{PM}{MC} = \frac{PB}{CA} \Rightarrow \frac{PM}{PB} = \frac{MC}{CA}$ (2).	0.25
	Cộng (1), (2) về theo vế: $\frac{PM}{PC} + \frac{PM}{PB} = \frac{MB}{BA} + \frac{MC}{CA} = \frac{MB}{BA} + \frac{MC}{BA} = \frac{BC}{BA}$ (đpcm).	0.5
	d. Gọi D là trung điểm của đoạn thẳng AH. Kẻ HK vuông góc với CD tại điểm K. Chứng minh rằng $\widehat{BAK} = \widehat{KHC}$.	1.0
	Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông DHC ta có: $DH^2 = DK \cdot DC \Rightarrow DA^2 = DK \cdot DC$ Xét $\triangle DKA$ và $\triangle DAC$ ta có: $\begin{cases} \widehat{ADK} = \widehat{ADC} \\ \frac{DA}{DC} = \frac{DK}{DA} \end{cases}$. Suy ra $\triangle DKA$ đồng dạng $\triangle DAC$.	0.25

Bài	Nội dung	Điểm
	Suy ra $\widehat{AKD} = \widehat{DAC} = 45^\circ$. Ta có $\widehat{ABH} + \widehat{AKH} = 45^\circ + 45^\circ + 90^\circ = 180^\circ$. Suy ra, tứ giác $ABHK$ là tứ giác nội tiếp.	0.25
	Suy ra $\widehat{AKB} = \widehat{AHB} = 90^\circ$. $\widehat{AHK} = \widehat{ABK} = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{AK}$.	0.25
	Mặt khác $\begin{cases} \widehat{BAK} + \widehat{ABK} = 90^\circ \\ \widehat{KHC} + \widehat{AHK} = 90^\circ \end{cases}$. Suy ra $\widehat{BAK} = \widehat{KHC}$ (điều phải chứng minh).	0.25
Bài 5 (1đ)	Xét tất cả các số thực x, y, z không âm và thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = xy + yz + zx - 2xyz$.	1.0
	Theo nguyên lý Dirichlet thì trong 3 số $2x - 1; 2y - 1; 2z - 1$ luôn tồn tại ít nhất 2 số cùng dấu. Giả sử $2x - 1; 2y - 1$ cùng dấu.	0.25
	Khi đó $(2x - 1)(2y - 1) \geq 0 \Leftrightarrow 2(x + y) - 4xy \leq 1 \Leftrightarrow (x + y) - 2xy \leq \frac{1}{2}$. $\Leftrightarrow z(x + y) - 2xyz \leq \frac{z}{2}$. (Vì z là số thực không âm).	0.25
	Từ giả thiết ta có $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1 \Leftrightarrow 1 - z^2 = x^2 + y^2 + 2xyz$ $\geq 2xy + 2xyz = 2xy(z + 1) \Rightarrow xy \leq \frac{1 - z}{2}$.	0.25
	Do đó $P = xy + yz + zx - 2xyz = xy + z(x + y) - 2xyz \leq \frac{1 - z}{2} + \frac{z}{2} = \frac{1}{2}$. Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P là $\frac{1}{2}$. Giá trị đó đạt được khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{2}$.	0.25

-HẾT-