

Bài I. (5,0 điểm)

- 1) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 4$ và $a^3 + b^3 + c^3 = -8$, tính giá trị biểu thức $P = a + b + c$.
- 2) Giải phương trình $x^2 - 5x + 2 = -2\sqrt{3x - 2}$.

Bài II. (5,0 điểm)

- 1) Cho a, b, c và d là các số nguyên tố thỏa mãn $5 < a < b < c < d < a + 10$. Chứng minh rằng $a + b + c + d$ chia hết cho 60.
- 2) Tìm tất cả các số tự nhiên n để $\frac{9n+5}{n+3}$ là bình phương của 1 số hữu tỷ.

Bài III. (3,0 điểm)

- 1) Với các số thực a, b thỏa mãn: $0 < b < a \leq 4$ và $a + b \leq 7$, chứng minh rằng $a^2 + b^2 \leq 25$.
- 2) Với các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = \frac{11}{6}$, tìm giá trị lớn nhất của $P = \frac{a}{a+1} + \frac{b}{2b+1} + \frac{c}{3c+1}$.

Bài IV. (6,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp (O) đường kính AK . Gọi H, M lần lượt là trực tâm của tam giác, trung điểm BC , trung trực của AH cắt AB, AC lần lượt tại F, E , đường thẳng qua O vuông góc với OA cắt AB, AC lần lượt tại Q, P . Gọi I là giao điểm của QE, PF , S là điểm đối xứng với Q qua O , SI cắt AC tại T , AH cắt BC tại D .

- 1) Chứng minh rằng $AH = 2OM$ và $\widehat{BAD} = \widehat{CAK}$.
- 2) Chứng minh rằng $CH \parallel PF$.
- 3) Trung trực của PQ cắt AD tại G . Chứng minh rằng $\widehat{GOT} = 90^\circ$.

Bài V. (1,0 điểm)

Có ba đồng sỏi có số sỏi tương ứng là 2020, 2021 và 2022 viên sỏi. Hai bạn An và Bình chơi một trò chơi như sau: hai người lần lượt thực hiện tuần tự lượt chơi của mình; ở mỗi lượt chơi, người chơi được phép chọn ra hai đồng sỏi có số sỏi tương ứng là a và b viên sỏi, sau đó loại khỏi mỗi đồng sỏi đó (a, b) viên sỏi trong đó (a, b) là ước chung lớn nhất của a và b . Người chơi đầu tiên loại bỏ hết sỏi ở một đồng sỏi nào đó là người chiến thắng. An là người chơi trước, chứng minh rằng Bình có chiến thuật để chiến thắng.

-----HẾT-----

Bài I. (5,0 điểm)

1) Cho các số thực a, b, c, d thỏa mãn $(2x-1)^4 = (ax+b)^4 + (x^2+cx+d)^2$ với mọi giá trị của $x \in \mathbb{R}$. Tính giá trị của biểu thức $P = a + 2b + 3c + 4d$.

2) Giải phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{2-x} = x^2 - 2x + 3$.

Bài II. (5,0 điểm)

1) Cho $P(x)$ là đa thức bậc bốn và có hệ số của bậc cao nhất là 1. Biết rằng $P(1) = 2, P(2) = 3, P(3) = 4, P(4) = 5$. Chứng minh rằng $P(5)$ là một số tự nhiên và chia hết cho 5.

2) Cho a, b là các số nguyên dương sao cho $a+b^3$ chia hết cho $a^2+3ab+3b^2-1$. Chứng minh rằng $a^2+3ab+3b^2-1$ chia hết cho lập phương của một số nguyên lớn hơn 1.

Bài III. (2,0 điểm) Với các số thực dương a, b, c thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{9}{4abc} = \frac{3}{4}$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2 + c^2$.

Bài IV. (6,0 điểm) Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) ngoại tiếp (I) . Các tiếp điểm của (I) với BC, CA, AB lần lượt là D, E, F . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Đường thẳng NP cắt các đường thẳng DE, DF lần lượt tại Q, R .

1) Chứng minh rằng tam giác AQB vuông và B, I, Q thẳng hàng.

2) Gọi H là trực tâm của tam giác ARQ . Chứng minh rằng $\widehat{HAR} = \widehat{QAI}$.

3) Chứng minh rằng H, I, M thẳng hàng.

Bài V. (2,0 điểm)

1) Cho a, b, c là các số nguyên dương lẻ sao cho chúng nguyên tố cùng nhau và $\frac{a^2+b^2-c^2}{a+b-c}, \frac{b^2+c^2-a^2}{b+c-a}, \frac{c^2+a^2-b^2}{c+a-b}$ đều là các số nguyên. Chứng minh rằng $|(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)|$ là số chính phương.

2) Mỗi ô vuông của lưới vuông 10×10 được tô bởi một trong hai màu xanh hoặc đỏ sao cho tại mỗi ô có màu xanh thì tổng số các ô màu đỏ ở hàng và cột chứa ô màu xanh đó không nhỏ hơn 10.

a) Đưa ra một cách tô thỏa mãn số ô màu xanh và số ô màu đỏ đều là 50.

b) Chứng minh với mọi cách tô thỏa mãn điều kiện trên, số ô màu xanh luôn không lớn hơn số ô màu đỏ.