

- a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$
- b) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x} + 8}{\sqrt{x} + 3}$
- c) Tìm các số nguyên x để biểu thức $P = A \cdot B$ nhận giá trị là số nguyên

II. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Bài 7. Giải các hệ phương trình sau:

$$\begin{array}{lll} 1) \begin{cases} 4x - 5y = -5 \\ 4x - 7y = -1 \end{cases} & 2) \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 2 \\ 5x - y = 11 \end{cases} & 3) \begin{cases} (x+3)(y+2) = 7 + xy \\ (x+1)(y+1) = xy + 2 \end{cases} \\ 4) \begin{cases} \frac{2}{x+1} + \frac{3}{y} = -1 \\ \frac{2}{x+1} + \frac{5}{y} = 1 \end{cases} & 5) \begin{cases} 3\sqrt{x-1} - \sqrt{y+2} = 5 \\ 2\sqrt{x-1} + 3\sqrt{y+2} = 18 \end{cases} & 6) \begin{cases} 2|x-1| + |x+y| = 4 \\ |1-x| + 2|x+y| = 5 \end{cases} \end{array}$$

Bài 8. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ mx - y = 4 \end{cases}$ với m là tham số.

Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x, y) thỏa mãn:

- a) x, y trái dấu b) x, y cùng dấu c) $x = |y|$

Bài 9. Cho hệ phương trình $\begin{cases} |x| + y = 2m \\ m|x| - y = 5 \end{cases}$ với m là tham số

- a) Giải hệ phương trình khi $m = 3$
b) Tìm m để hệ phương trình vô nghiệm

Bài 10. Cho hệ phương trình $\begin{cases} (m-1)x + y = 2 \\ mx + y = m+1 \end{cases}$ với m là tham số

- a) Chứng minh hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất (x, y) với mọi giá trị của m
b) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm (x, y) thỏa mãn $2x + y \leq 3$

Bài 11. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + my = 1 \\ mx - y = -m \end{cases}$ với m là tham số

- a) Chứng minh hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất (x, y) với mọi giá trị của m
b) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm (x, y) sao cho $x < 1$ và $y < 1$
c) Tìm số nguyên m để hệ phương trình có nghiệm (x, y) sao cho x, y là các số nguyên.

III. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Bài 12. Giải các phương trình sau:

- a) $5x^2 - x + 2 = 0$ b) $-3x^2 + 2x + 8 = 0$
c) $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$ d) $2x^2 - (1 - 2\sqrt{2})x - \sqrt{2} = 0$

IV. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Bài 13. Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng tổng các chữ số của nó bằng 14 và nếu đổi chỗ hai chữ số của nó thì được số nhỏ hơn số ban đầu 18 đơn vị.

Bài 14. Cho một số tự nhiên có hai chữ số. Biết rằng tổng của chữ số hàng chục và hai lần chữ số hàng đơn vị bằng 12. Nếu thêm số 0 vào giữa hai chữ số thì ta được một số mới có ba chữ số lớn hơn số ban đầu 180 đơn vị. Tìm số ban đầu.

Bài 15. Cho một số tự nhiên có hai chữ số. Biết tổng hai chữ số của nó bằng 9. Nếu lấy số đó chia cho số viết theo thứ tự ngược lại thì được thương là 2 và dư 18. Tìm số ban đầu.

Bài 16. Quãng đường AC dài 165km và B là một vị trí trên quãng đường AC. Một ô tô xuất phát từ A đến B với vận tốc 50km/h, rồi đi tiếp quãng đường BC với vận tốc 45km/h. Tính thời gian ô tô đi trên quãng đường AB, BC. Biết thời gian ô tô đi trên quãng đường AB ít hơn thời gian ô tô đi trên quãng đường BC là 30 phút.

Bài 17. Một tàu thủy chạy xuôi dòng sông 66km hết một thời gian bằng tàu chạy ngược dòng 54km. Nếu tàu chạy xuôi dòng 22km và ngược dòng 9km thì hết 1 giờ. Tính vận tốc riêng của tàu thủy và vận tốc dòng nước (biết vận tốc riêng của tàu không đổi).

Bài 18. Đoạn đường AB dài 180km. Cùng một lúc, xe máy đi từ A và ô tô đi từ B, hai xe gặp nhau tại điểm C cách A 80km. Nếu xe máy khởi hành sau 54 phút thì chúng gặp nhau tại điểm D cách A 60km. Tính vận tốc của ô tô và xe máy.

Bài 19. Hai người thợ cùng làm một công việc trong 16 giờ thì xong. Nếu người thứ nhất làm trong 3 giờ và người thứ hai làm trong 6 giờ thì họ làm được 25% công việc. Hỏi mỗi người đó làm xong công việc đó trong bao lâu thì xong?

Bài 20. Hai đội công nhân cùng làm một đoạn đường trong 36 ngày thì xong việc. Nếu đội thứ nhất làm xong $\frac{1}{3}$ đoạn đường rồi nghỉ, đội thứ hai đến làm tiếp đoạn đường còn lại với thời gian dài hơn đội thứ nhất đã làm là 40 ngày. Hỏi mỗi đội làm một mình sau bao nhiêu ngày thì xong đoạn đường này.

Bài 21. Hai máy cày làm việc trên một cánh đồng. Nếu hai máy cùng làm thì 10 ngày cày xong cả cánh đồng. Nhưng thực tế, hai máy chỉ cùng cày 7 ngày đầu, sau đó máy cày thứ nhất đi làm việc nơi khác, máy thứ hai cày tiếp 9 ngày nữa thì xong. Hỏi mỗi máy cày riêng thì sau bao lâu cày xong cả cánh đồng?

Bài 22. Trong tháng đầu, hai tổ công nhân sản xuất được 700 chi tiết máy. Sang tháng thứ hai, tổ I vượt mức 15%, tổ II vượt mức 22%, do đó cuối tháng cả hai tổ sản xuất được 833 chi tiết máy. Hỏi rằng trong tháng đầu, mỗi tổ công nhân sản xuất được bao nhiêu chi tiết máy?

Bài 23. Dân số của một tỉnh là 420 nghìn người. Sau 1 năm, dân số nội thành tăng 0,8% và dân số ngoại thành tăng 1,1% nên sau 1 năm dân số toàn tỉnh tăng 1%. Tính dân số nội thành và dân số ngoại thành của tỉnh đó tại thời điểm hiện tại.

Bài 24. Một vườn hoa hình chữ nhật có chu vi 48m. Nếu tăng chiều rộng lên 4 lần và chiều dài lên 3 lần thì chu vi vườn hoa sẽ là 162m. Tính diện tích của mảnh vườn.

Bài 25. Cho một tấm bìa hình chữ nhật. Nếu tăng độ dài mỗi cạnh của nó lên 1cm thì diện tích của hình chữ nhật sẽ tăng thêm 13cm². Nếu giảm chiều dài đi 2cm, chiều rộng đi 1cm thì diện tích của hình chữ nhật sẽ giảm 15cm². Tính chiều dài và chiều rộng của tấm bìa đã cho.

V. HÌNH HỌC

Bài 26. Cho đường tròn $(O; R)$ có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Lấy điểm M bất kì thuộc đoạn thẳng OA (M khác O, A). Tia DM cắt đường tròn (O) tại điểm N .

- Chứng minh tứ giác $OCNM$ nội tiếp.
- Chứng minh $DM \cdot DN = DO \cdot DC$
- Đường tròn tâm M bán kính MC cắt AC, CB lần lượt tại E, F . Tính $CE + CF$ theo bán kính R
- Nối B với N cắt OC tại P . Tìm vị trí của điểm M để $\frac{OM}{AM} + \frac{OP}{CP}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 27. Cho nửa đường tròn (O, R) , đường kính AB . Gọi C là điểm nằm chính giữa cung AB . Điểm M thuộc cung AC . Kẻ $MH \perp AB$ tại H ; AC cắt MH tại K ; MB cắt AC tại E . Kẻ $EI \perp AB$ tại I .

- Chứng minh $BHCK$ và $AMEI$ là các tứ giác nội tiếp.
- Chứng minh $AK \cdot AC = AM^2$
- Cho $R = 3\text{cm}$. Tính $AE \cdot AC + BE \cdot BM$
- Chứng minh khi M chuyển động trên cung AC thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IMC thuộc một đường thẳng cố định.

Bài 28. Cho đường tròn $(O; R)$ và đường thẳng d không có điểm chung với đường tròn với đường tròn. Gọi M là một điểm thuộc đường thẳng d . Qua M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (O) (A, B là các tiếp điểm). Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên d .

- Chứng minh năm điểm M, A, O, B, H cùng thuộc một đường tròn.
- Gọi K và I lần lượt là giao điểm của OH, OM với AB . Chứng minh $OK \cdot OH = OI \cdot OM$
- Gọi E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MAB . Giả sử $\widehat{AMB} = 60^\circ$, chứng minh tứ giác $OAEB$ là hình thoi.
- Tìm vị trí của điểm M trên đường thẳng d để diện tích tam giác OIK đạt giá trị lớn nhất.

Bài 29. Cho đường tròn $(O; R)$, đường kính AB . Kẻ tiếp tuyến Ax với đường tròn. Trên tia Ax lấy điểm K ($AK \geq R$). Qua K kẻ tiếp tuyến KM với đường tròn (O) (M là tiếp điểm). Đường thẳng vuông góc với AB tại O , cắt MB tại E .

- Chứng minh $KAOM$ là tứ giác nội tiếp.
- OK cắt AM tại I , chứng minh tích $OI \cdot OK$ không đổi khi A chuyển động trên tia Ax .
- Chứng minh $KAOE$ là hình chữ nhật.
- Gọi H là trực tâm của tam giác KMA . Chứng minh khi K chuyển động trên Ax thì H luôn thuộc một đường tròn cố định.

Bài 30. Cho đường tròn (O) có đường kính $AB = 2R$ và E là điểm bất kì trên đường tròn (E khác A và B). Đường phân giác góc AEB cắt đoạn thẳng AB tại F và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K .

- Chứng minh $\triangle KEA$ đồng dạng với $\triangle KAF$

b) Gọi I là giao điểm của đường trung trực của đoạn thẳng EF với OE. Chứng minh (I) bán kính IE tiếp xúc với đường tròn (O) tại E và tiếp xúc với đường thẳng AB tại F.

c) Gọi M, N lần lượt là giao điểm thứ hai của AE, BE với đường tròn (I). Chứng minh $MN \parallel AB$.

d) Tính giá trị nhỏ nhất của chu vi tam giác KPQ theo R khi E chuyển động trên đường tròn (O), với P là giao điểm của NF và AK; Q là giao điểm của MF và BK.

VI. CÁC DẠNG BÀI TẬP KHÁC

1) Với $x, y \geq 0$, tìm GTNN của biểu thức: $P = x^2 + y^2 + \frac{16}{\sqrt{(x+1)(y+1)}}$

2) Cho a, b, c là các số thực làm cho phương trình ẩn x sau có nghiệm: $x^2 - 2(2a - b)x + 5a^2 - 4ab + 2b^2 - 1 = 0$.

Chứng minh rằng: $a^{2000} + b^{2001} < 2$

3) Cho các số thực a, b, c không âm thỏa mãn không có hai số nào đồng thời bằng 0 và

$a^2 + b^2 + c^2 = 2(ab + ac + bc)$. Chứng minh $\sqrt{\frac{2ab}{a^2 + b^2}} + \sqrt{\frac{2bc}{b^2 + c^2}} + \sqrt{\frac{2ca}{c^2 + a^2}} \geq 1$

4) Cho ba số a, b, c dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{a}{a^2 + bc} + \frac{b}{b^2 + ca} + \frac{c}{c^2 + ab}$.

5) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = (x - 1)^4 + (x - 3)^4 + 6(x - 1)^2(x - 3)^2$.

----- THCS.TOANMATH.com -----