

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1: (4,0 điểm) Cho biểu thức:

$$A = \left(\frac{2x+1}{x\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} \right) \left(\frac{1+x\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} - \sqrt{x} \right) + \frac{2-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = \frac{1}{1+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{7}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{97}+\sqrt{100}}$

Câu 2: (4,0 điểm)

a) Giải phương trình: $\sqrt{x+2} + 2x - 10 = \sqrt{2x-3}$

b) Giải và biện luận phương trình: $\frac{2x-a}{x-1} + \frac{x-a}{x+2} = 3$ (với a là tham số)

c) Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng (d) có phương trình
 $(m-4)x + (m-3)y = 1$ (m là tham số)

Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng d là lớn nhất.

Câu 3: (4,0 điểm)

a) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $x^4 + 2y^2 - 17x^2 - 2xy + 90 = 6y$

b) Cho 3 số nguyên dương x, y, z. Chứng minh rằng:

$$(x-y)^5 + (y-z)^5 + (z-x)^5 \div 5(x-y)(y-z)(z-x)$$

Câu 4: (6 điểm) Cho hình vuông ABCD. Gọi E là một điểm thuộc cạnh BC (E khác B). Tia AE cắt tia DC tại K. Kẻ đường thẳng d đi qua A và vuông góc với AE. Đường thẳng d cắt đường thẳng CD tại I.

a) Chứng minh: $\frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AK^2}$ không đổi khi E thay đổi trên cạnh BC.

b) Đường thẳng d đi qua A và vuông góc với IE cắt đường thẳng CD tại M. Chứng minh rằng: $\frac{1}{AE} + \frac{1}{AK} = \frac{\sqrt{2}}{AM}$.

c) Tìm vị trí của E để độ dài đoạn thẳng IK ngắn nhất.

Câu 5: (2,0 điểm) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$

$$\text{Chứng minh: } \frac{a}{2b^3+1} + \frac{b}{2c^3+1} + \frac{c}{2a^3+1} \geq 1$$

----- Hết -----

Họ tên thí sinh: ----- Số báo danh: -----