



A. ĐẠI SỐ

PHẦN I. THU GỌN BIỂU THỨC

Bài 1. Rút gọn các biểu thức sau:

1) $\sqrt{45} + \sqrt{20} - \sqrt{180}$

2) $\sqrt{32} - 2\sqrt{18} + 4\sqrt{50}$

3) $3\sqrt{2} - 4\sqrt{18} + 2\sqrt{32} - \sqrt{50}$

4) $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$

5) $\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2} + \sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}$

6) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

7) $\frac{1}{\sqrt{5}-2} + \frac{\sqrt{10}-\sqrt{5}}{1-\sqrt{2}}$

8) $\frac{1}{5+2\sqrt{3}} + \frac{1}{5-2\sqrt{3}}$

9) $\sqrt{5} - \frac{8}{\sqrt{5}+1} + \frac{2\sqrt{5}-5}{2-\sqrt{5}}$

10) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-1} - \sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$

11) $\sqrt{5-2\sqrt{5}}+1$

12) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$

13) $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$

14) $\sqrt{5+2\sqrt{6}} - \sqrt{5-2\sqrt{6}}$

15) $\sqrt[3]{(2+\sqrt{2})^3} - \sqrt[3]{(3\sqrt{2}-1)^3}$

Bài 2. Rút gọn biểu thức:

1) $\sqrt{(x-2)^2}$ với $x \geq 2$

2) $\sqrt{(x-\sqrt{5})^2}$ với $x > 3$

3) $\sqrt{x^2} + \sqrt{(-3x)^2}$ với $x > 0$

4) $\sqrt{(2-x)^2}$ với $x > 2$

5) $\sqrt{x^2-4x+4}$ với $x < 2$

6) $\sqrt{1-2x+x^2}$ với $x > 2$

7) $\sqrt{75(x-18)^2}$ với $x > 18$

8) $\sqrt{96(9x^2-12x+4)}$ với $x < \frac{2}{3}$

9) $\frac{3}{x-y}\sqrt{x^4(x-y)^2}$ với $x > y$

10) $\frac{\sqrt{3x^2(3-x)^2}}{\sqrt{108}}$

11) $\frac{\sqrt{54(x+1)^3}}{\sqrt{6(x+1)}}$

12) $\left(x\sqrt{\frac{3}{x}} + 3\sqrt{\frac{x}{3}} - \sqrt{27x^3}\right) : \sqrt{3x}$

Bài 3. Giải các phương trình sau:

1) $\sqrt{2x-3} = \frac{1}{2}$

2) $\sqrt{-2x+5} = 3$

3) $3\sqrt{2x} - 5\sqrt{8x} + 7\sqrt{18x} = 28$

4) $\frac{5}{3}\sqrt{15x} - \sqrt{15x} + 11 = \frac{1}{3}\sqrt{15x}$

5) $5\sqrt{3x} - 4\sqrt{27x} - \sqrt{12x} - \sqrt{75x} = -28$

6) $15\sqrt{x} + \sqrt{x} - \sqrt{25x} = 110$

7) $\sqrt{x-1} + 4\sqrt{x-1} + 6\sqrt{x-1} - 7\sqrt{x-1} = 12$

8) $-3\sqrt{x+2} - 4\sqrt{4x+8} + \sqrt{9x+18} = -40$

$$9) \sqrt{18x+9} - \sqrt{8x+4} + \frac{1}{3}\sqrt{2x+1} = 4$$

$$10) 2\sqrt{16x-32} + \sqrt{9x-18} = 15 + \sqrt{4x-8}$$

$$11) \sqrt{x^2 - 2x + 1} = 10$$

$$12) \sqrt{1-2x^2} = x-1$$

$$13) \sqrt{-x+4} = x-1$$

$$14) \sqrt{x-5} - \sqrt{x+4} = 2$$

Bài 4. Tìm điều kiện xác định và rút gọn các biểu thức sau:

$$A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{3x+9}{x-9}$$

$$B = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$$

$$C = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \right) \cdot \frac{x-5}{\sqrt{x}}$$

$$D = \left(\frac{\sqrt{x}-4}{x-2\sqrt{x}} - \frac{3}{2-\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} \right)$$

$$E = \left(\frac{2x+1}{x\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} \right) \left(\frac{x\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} - \sqrt{x} \right)$$

$$F = \left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+4\sqrt{x}+4} \right) : \frac{\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}}$$

PHẦN II. BÀI TOÁN TỔNG HỢP:

Bài 1. Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$ với $x \geq 0; x \neq 4$.

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tính giá trị của biểu thức tại $x = 144$.

Bài 2. Cho biểu thức $A = \frac{3}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-3}{x-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 3 - 2\sqrt{2}$.

Bài 3. Cho biểu thức $A = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} + \frac{2}{x-1}$ (với $x \geq 0; x \neq 1$).

a) Tính giá trị của A khi $x = 25$.

b) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$.

c) Đặt $P = A : B$. Tìm các giá trị của x để $P = \frac{5}{2}$.

Bài 4. Cho biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}}{x-9} - \frac{2}{\sqrt{x}+3}$ và $B = \frac{6}{x-3\sqrt{x}}$ với $x > 0; x \neq 9$.

a) Tính giá trị của biểu thức B tại $x = 25$.

b) Rút gọn biểu thức A .

c) Tìm x để $\frac{B}{A} = \frac{2\sqrt{x}+1}{2}$.

Bài 5. Cho các biểu thức: $A = \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}$ và $B = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$ với $x \geq 0; x \neq 1$

a) Tính giá trị của B khi $x = 49$.

b) Rút gọn biểu thức $S = A - B$.

c) So sánh S với $\frac{1}{3}$.

Bài 6. Cho hai biểu thức:

$$A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{3\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(1-\sqrt{x})} \text{ và } B = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1} \text{ với } x \geq 0, x \neq 1$$

a) Tính giá trị của B khi $x = 4$.

b) Rút gọn biểu thức A .

c) Cho $S = A.B$. Chứng minh rằng: $S \leq \frac{3}{2}$.

Bài 7. Cho biểu thức: $A = \frac{x-3}{\sqrt{x}+3}$ và $B = \left(\frac{x+3\sqrt{x}-2}{x-9} - \frac{1}{\sqrt{x}+3} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0; x \neq 9$

a) Tính A với $x = 16$.

b) Rút gọn B .

c) Cho $P = \frac{A}{B}$. Tìm x để $|P| + P = 0$.

Bài 8. Cho hai biểu thức:

$$A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} (x \geq 0) \text{ và } B = \left(\frac{-2\sqrt{x}+10}{x-25} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5} \right) : \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+5} \text{ với } x \geq 0, x \neq 25.$$

a) Khi $x = 9$, tính giá trị biểu thức A .

b) Rút gọn biểu thức B .

c) Đặt $P = \frac{A}{B}$. Tìm x để $|P| = P$.

Bài 9. Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq \pm 4$.

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm x để $A > \frac{1}{2}$.

Bài 10. Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$; $B = \frac{7}{\sqrt{x}+1} - \frac{12}{(\sqrt{x}+1)(3-\sqrt{x})}$ với $x \geq 0; x \neq 9$

- Tính giá trị của A khi $x = \frac{9}{4}$.
- Rút gọn $M = A - B$.
- Tìm các giá trị của x sao cho $M^2 < \frac{25}{4}$.

Bài 11. Cho hai biểu thức:

$$A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}; B = \frac{1}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} - \frac{3\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}-2} \text{ với } x \geq 0; x \neq 1; x \neq 9$$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 64$
- Rút gọn biểu thức B
- Đặt $M = A.B$, hãy tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức M có giá trị nguyên.

Bài 12. 1) Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$ với $x \geq 0$. Tính giá trị của A khi $x = 16$.

2) Cho biểu thức $B = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1} - \frac{5}{1-\sqrt{x}} + \frac{4}{x-1}$ với $x \geq 0; x \neq 1$. Rút gọn B .

3) Tìm các số hữu tỉ x để $P = A.B$ có giá trị nguyên.

Bài 13. Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 4$.
- Rút gọn biểu thức $C = \frac{A}{B}$.
- Tìm các giá trị của x để biểu thức C đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 14. Cho biểu thức $\frac{\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}-3}$ và $B = \frac{1}{2\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+3} - \frac{3+8\sqrt{x}}{4x-9}$ với $x \geq 0, x \neq \frac{9}{4}$

- Tính giá trị của biểu thức A tại $x = 25$.
- Rút gọn biểu thức B .
- Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để biểu thức $P = A - B$ đạt giá trị nguyên lớn nhất.

Bài 15. Với $x \geq 0, x \neq 4$ và $x \neq 9$, cho hai biểu thức

$$A = \frac{x}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \text{ và } B = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3}.$$

a) Tính giá trị của B khi $x = 36$.

b) Chứng minh $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2}$.

c) Tìm số tự nhiên $x \in \mathbb{N}$ để $P = B \cdot (A - 1)$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 16. Cho biểu thức $A = \frac{-5\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 3}$ với $x \geq 0; x \neq 1$

a) So sánh A với 1

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức A

c) Tìm GTNN của $M = A - \frac{27}{\sqrt{x} + 3}$.

d) Tìm tất cả các giá trị của x để A nhận giá trị nguyên.

e) Tìm tất cả các giá trị của m để $A = m$ có nghiệm.

Bài 17. Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 5}$ và $B = \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 1} + \frac{5}{\sqrt{x} - 1} + \frac{4}{x - 1}$.

a) Tìm điều kiện xác định của biểu thức B và rút gọn B

b) Tính giá trị biểu thức A khi $x = 1$.

c) Đặt $P = A \cdot B$. So sánh P với 7.

d) Chứng minh rằng $P > 1$.

e) Tìm các giá trị của x để $P = \frac{13}{11}$.

f) Tìm x để $P \geq \frac{10}{9}$.

g) Tìm số nguyên x để $P > \frac{11}{10}$.

h) Tìm m để $P = m$ có nghiệm.

k) Tìm số nguyên x để P nhận giá trị nguyên.

l) Tìm tất cả các giá trị của x để P nhận giá trị nguyên.

Bài 18. Cho các biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} + \frac{2}{x - \sqrt{x}}$ và $B = \frac{1}{\sqrt{x} - 1}$ với $x > 0; x \neq 1$.

a) Tính giá trị của biểu thức B khi $x = 9$;

b) Đặt $C = A : B$, rút gọn biểu thức C ;

c) Tìm giá trị của x để $C = 3$;

d) So sánh C với $\frac{1}{4}$;

e) Chứng minh $C > 2$;

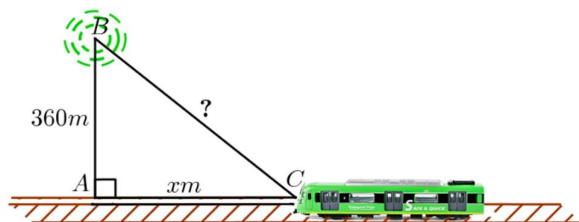
f) Tìm x nguyên để biểu thức C có giá trị nguyên;

g) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức C ;

h) Tìm các giá trị của m để x thỏa mãn bất phương trình: $-\sqrt{x} \cdot C > \sqrt{x} + m - 3$.

PHẦN III. BÀI TOÁN THỰC TẾ:

Bài 1. Một trạm phát sóng được đặt ở vị trí B cách đường tàu một khoảng $AB = 360\text{m}$. Đầu tàu đang ở vị trí C, cách vị trí A một khoảng $AC = x \text{ (m)}$



a) Viết biểu thức biểu thị khoảng cách từ trạm phát sóng đến đầu tàu.

b) Tính khoảng cách trên khi $x = 480$;

$x = 900$ (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

Bài 2. Một khối gỗ hình lập phương có thể tích $16\,000\text{ cm}^3$. Chia khối gỗ này thành 16 khối gỗ hình lập phương nhỏ có thể tích bằng nhau. Tính độ dài cạnh của mỗi khối gỗ lập phương nhỏ.

Bài 3. Công thức $h = 0,4\sqrt[3]{x}$ biểu diễn mối tương quan giữa cân nặng x (tính bằng kg) và chiều cao h (tính bằng m) của một con hươu cao cổ.

a) Một con hươu cổ cân nặng 195kg thì cao bao nhiêu mét?

(làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

b) Một con hươu cao cổ có chiều cao $2,62\text{m}$ thì cân nặng bao nhiêu kg?

(kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

B/ HÌNH HỌC

PHẦN I. CÁC BÀI TOÁN CHỨNG MINH

Bài 1. Cho đường tròn (O, R) và hai điểm A, B thuộc (O) . Qua A, B vẽ hai đường thẳng lần lượt vuông góc với OA, OB, hai đường thẳng này cắt nhau tại M.

a) Chứng minh bốn điểm O, A, B, M cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $MA = MB$

c) Chứng minh MO là đường trung trực của AB.

d) OM cắt AB tại H.

Chứng minh khi A, B chuyển động trên đường tròn (O) thì tích OH. OM không đổi

Bài 2. Cho đường tròn (O, R) đường kính AB và một điểm M nằm bên ngoài đường tròn (O) . Đoạn thẳng MA, MB cắt đường tròn (O) lần lượt tại điểm E, F.

a) Chứng minh BE vuông góc với MA và AF vuông góc với MB.

b) BE cắt AF tại H. Chứng minh bốn điểm M, E, H, F cùng thuộc một đường tròn.

c) Gọi I là trung điểm của MH. Chứng minh IE vuông góc với OE.

d) Chứng minh bốn điểm I, E, O, F cùng thuộc một đường tròn.

Bài 3. Cho ΔABC đều cạnh bằng a , các đường cao BM, CN . Gọi O là trung điểm của BC .

- Chứng minh 4 điểm B, C, M, N cùng thuộc đường tròn (O) .
- Gọi G là giao điểm của BM và CN . Chứng minh G nằm bên trong, điểm A nằm bên ngoài đường tròn đường kính BC .

Bài 4. Cho đường tròn (O) đường kính AB , vẽ góc ở tâm với C nằm trên đường tròn (O) . Vẽ dây CD vuông góc với AB và dây DE song song với AB .

- Tính số đo cung nhỏ AC
- Chứng minh CE là đường kính hay ba điểm C, O, E thẳng hàng.
- Tính số đo cung lớn BE .

Bài 5. Cho hình thang vuông $ABCD$ ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$), $AB = 4\text{cm}$, $BC = 13\text{cm}$, $CD = 9\text{cm}$.

Kẻ BE vuông góc với DC tại E .

- Chứng minh bốn điểm A, B, E, D cùng thuộc một đường tròn.
- Tính độ dài đoạn thẳng AD .
- Chứng minh rằng đường thẳng AD tiếp xúc với đường tròn có đường kính BC .

Bài 6. Cho ΔABC vuông tại A có BD là đường phân giác. Kẻ DM vuông góc với BC tại M .

- Chứng minh $DM = DA$
- Xác định vị trí tương đối của đường thẳng BC và đường tròn tâm D bán kính DA .

Bài 7. Cho đường tròn (O) và điểm I ở ngoài đường tròn. Gọi M là giao điểm của đường tròn tâm K đường kính IO và đường tròn (O) . Chứng minh đường thẳng IM là tiếp tuyến của (O) tại M .

Bài 8. Cho AB là một dây không đi qua tâm của đường tròn (O) . Đường thẳng qua O và vuông góc với AB cắt tiếp tuyến tại A của (O) ở điểm C . Chứng minh rằng CB là một tiếp tuyến của (O) .

Bài 9. Cho tam giác ABC có hai đường cao BD, CE cắt nhau tại H .

- Chứng minh bốn điểm A, D, H, E cùng nằm trên một đường tròn.
- Gọi O là tâm đường tròn đi qua bốn điểm A, D, H, E và M là trung điểm của BC . Chứng minh ME là tiếp tuyến của (O) .

Bài 10. Cho đường tròn (O, R) và điểm A nằm ngoài $(O; R)$. Vẽ tiếp tuyến AB của đường tròn (O) (B là tiếp điểm). Lấy điểm C thuộc đường tròn (O) sao cho $AB = AC$.

- Chứng minh AC là tiếp tuyến của đường tròn (O) .
- D là điểm trên đoạn thẳng AC . Đường thẳng qua C vuông góc với OD tại M cắt đường tròn (O) tại E (E khác C). Chứng minh DE là tiếp tuyến của đường tròn (O) .
- Vẽ đường kính BK . Chứng minh $CK \parallel AO$

PHẦN II. CÁC BÀI TOÁN THỰC TẾ

Bài 1. Có hai chiếc bánh Pizza hình tròn. Chiếc bánh thứ nhất có đường kính 16cm được cắt thành 6 miếng đều nhau có dạng hình quạt tròn. Chiếc bánh thứ hai có đường kính 18cm được cắt thành 8 miếng đều nhau và có dạng hình quạt tròn. Hãy so sánh diện tích bề mặt của hai miếng bánh cắt ra từ chiếc bánh thứ nhất và thứ hai.



Bài 2. Một chiếc quạt giấy khi xòe ra có dạng nửa hình tròn bán kính 2,2 dm như hình bên. Tính diện tích phần giấy của chiếc quạt, biết rằng khi gấp lại, phần giấy có chiều dài khoảng 1,6dm (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của dm^2)



Bài 3. Hình quạt tô màu đỏ ở hình vẽ bên dưới có bán kính bằng 2 dm và góc ở tâm bằng 150° .

a) Tính diện tích của hình quạt đó.

b) Tính chiều dài cung tương ứng với hình quạt tròn đó.



Bài 4. Kim phút của một đồng hồ treo tường có độ dài 16cm. Hỏi trong 20 phút thì đầu kim phút chỉ vạch được một cung tròn có độ dài bằng bao nhiêu cm ?

Bài 5. Một khăn trải bàn hình tròn phủ lên mặt bàn tròn có đường kính 1,2m thì rủ xuống xung quanh với độ dài 25cm. Tính diện tích của khăn trải bàn (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).



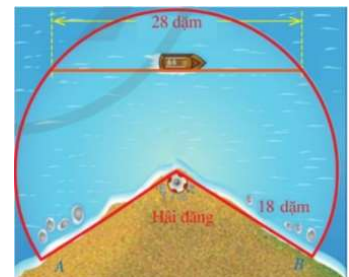
Bài 6. Bánh xe (khi bơm căng) của một chiếc xe đạp có đường kính 650 mm. Biết rằng khi giò đĩa quay một vòng thì bánh xe đạp quay được khoảng 3,3 vòng (hình vẽ). Hỏi chiếc xe đạp di chuyển được quãng đường dài bao nhiêu mét sau khi người đi xe đạp 10 vòng liên tục?



Bài 7. Hình vẽ bên dưới biểu diễn vùng biển được chiếu sáng bởi một hải đăng có dạng một hình quạt tròn với bán kính 18 dặm, cung AmB có số đo 245° .

a) Hãy tính diện tích vùng biển có thể nhìn thấy ánh sáng từ hải đăng theo đơn vị kilômét vuông (lấy 1 dặm = 1 609 m và làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

b) Giả sử một con thuyền di chuyển dọc theo dây cung có độ dài 28 dặm của đường tròn với tâm là tâm của



hình quạt tròn, bán kính là 18 dặm. Tính khoảng cách nhỏ nhất từ con thuyền đến hải đăng (theo đơn vị dặm và làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Bài 8. Một bánh xe dạng hình tròn có bán kính 20cm lăn đến bức tường hợp với mặt đất một góc 60° . Hãy tính khoảng cách ngắn nhất từ tâm bánh xe đến góc tường.

