



I. NỘI DUNG KIẾN THỨC ÔN TẬP

- **Đại số**
 - ✓ Tính chất cơ bản của phân thức đại số
 - ✓ Phép cộng, phép trừ, phép nhân và phép chia phân thức đại số
- **Hình học**
 - ✓ Ba trường hợp đồng dạng của hai tam giác
 - ✓ Định lý Pythagore và ứng dụng
 - ✓ Các trường hợp đồng dạng của hai tam giác vuông

II. BÀI TẬP

A. Trắc nghiệm

Câu 1. Đa thức M thỏa mãn đẳng thức $\frac{4y^2 - 8y}{M} = \frac{y - 2}{3y - 1}$ là:

- A. $12y^2 - 1$ B. $12y^2 - y$ C. $12y^2 - 4y$ D. $12y^2$

Câu 2. Rút gọn phân thức $\frac{8x^2 - 8x + 2}{4x^2 - 2x}$ được kết quả là:

- A. $\frac{x - 1}{2x}$ B. $\frac{2x - 1}{2x}$ C. $\frac{2x}{2x - 1}$ D. $\frac{2x - 1}{x}$

Câu 3. Kết quả rút gọn phân thức $\frac{x^3 - 15x^2 + 75x - 125}{25 - x^2}$ là:

- A. $\frac{-(x - 5)^2}{x + 5}$ B. $\frac{(x - 5)^2}{x + 5}$ C. $\frac{(x + 5)^2}{x - 5}$ D. $\frac{-(x + 5)^2}{x - 5}$

Câu 4. Một xưởng làm bóng nhựa lập kế hoạch sản xuất 9000 quả bóng trong x ngày. Nhờ cải tiến kỹ thuật, xưởng đã hoàn thành sớm 3 ngày và làm vượt kế hoạch 300 quả bóng. Phân thức biểu thị số quả bóng mỗi ngày xưởng làm được theo thực tế là:

- A. $\frac{300}{x}$ C. $\frac{9300}{x + 3}$
B. $\frac{9300}{x - 3}$ D. $\frac{9000}{x - 3}$

Câu 5. Kết quả của phép tính $\frac{x^2}{x - 3} + \frac{9}{3 - x}$ là:

A. $x + 3$

B. $x - 3$

C. $3 - x$

D. $\frac{x^2 + 9}{x - 3}$

Câu 6. Giá trị của biểu thức $P = \frac{2}{x+1} - \frac{4}{1-x} - \frac{5x+1}{x^2-1}$ tại $x = 4$ là:

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{1}{4}$

C. $-\frac{1}{4}$

D. $\frac{1}{5}$

Câu 7. Một tàu du lịch chạy xuôi dòng 12km , sau đó quay ngược lại để trở về điểm xuất phát. Biết rằng vận tốc của tàu khi nước yên lặng là 8 km/h và vận tốc của dòng nước là $x\text{ (km/h)}$. Biểu thức biểu thị tổng thời gian tàu chạy là:

A. $\frac{12}{8+x}$

C. $\frac{12}{8+x} + \frac{12}{8-x}$

B. $\frac{12}{8} + \frac{12}{8+x}$

D. 3

Câu 8. Kết quả của phép tính $\left(-\frac{20x}{3y^2}\right) : \left(-\frac{4x^3}{5y}\right)$ là:

A. $\frac{25}{3xy^2}$

B. $\frac{-25}{3xy^2}$

C. $\frac{25}{3x^2y}$

D. $\frac{-25}{3x^2y}$

Câu 9. Cho $M : \frac{x^2}{x-2} = \frac{x^2+4}{x} - 4$. Biểu thức M là:

A. $x^2 + 2x$

B. $x^2 + 4x$

C. $x^2 - 2x$

D. $\frac{(x-2)^2}{x}$

Câu 10. Kết quả của phép nhân $\frac{x^2+3}{x-4} \cdot \frac{198-x}{2x+3} \cdot \frac{4-x}{x^2+3} \cdot \frac{2x+3}{x-198}$ là:

A. $x^2 + 3$

B. $198 - x$

C. -1

D. 1

Câu 11. Biểu thức P thỏa mãn $\frac{x^3+1}{x^2+2x+1} : \frac{3x^2-3x+3}{x^2-1} = \frac{x-1}{P}$ là:

A. $\frac{x-1}{3}$

B. 3

C. $x^3 + 1$

D. $x^2 - x + 1$

Câu 12. Cho $\triangle ABC \sim \triangle MNP$. Khẳng định nào đúng trong các khẳng định sau?

A. $\frac{MN}{AB} = \frac{MP}{AC}$

B. $\frac{MN}{AB} = \frac{MP}{BC}$

C. $\frac{MN}{AB} = \frac{NP}{AC}$

D. $\frac{MN}{BC} = \frac{NP}{AC}$

Câu 13. Nếu tam giác ABC đồng dạng với tam giác MNP theo tỉ số k thì tam giác MNP đồng dạng với tam giác ABC theo tỉ số nào?

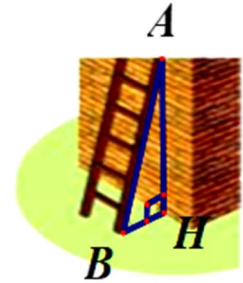
- A. $\frac{1}{k^2}$ B. $\frac{1}{k}$ C. k^2 D. k

Câu 14. Cho $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ theo tỉ số đồng dạng $k = 2$. Khi đó chu vi $\triangle ABC$ gấp bao nhiêu lần chu vi $\triangle DEF$?

- A. 1 B. 2 C. 4 D. 8

Câu 15. Một chiếc thang có chiều dài $AB = 3,7m$ đặt cách một bức tường khoảng cách $BH = 1,2m$. Tính chiều cao AH .

- A. $3,5m$ B. $1,5m$
C. $12,25m$ D. $4,5m$



Câu 16. Bộ ba số đo nào dưới đây là độ dài ba cạnh của một tam giác vuông?

- A. $1cm, 1cm, 2cm$ B. $2cm, 4cm, 20cm$
C. $5cm, 4cm, 3cm$ D. $7cm, 8cm, 10cm$

Câu 17. Cho tam giác ABC vuông tại A , có đường cao AH . Trong các khẳng định sau có bao nhiêu khẳng định đúng?

- (I). $AB^2 = BH.CH$ (II). $AC^2 = CH.BC$ (III). $BC^2 = AB.AC$
A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

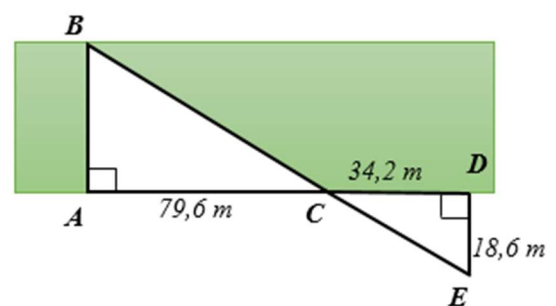
Câu 18. Cho tam giác ABC đồng dạng với tam giác PQR có $\frac{AB}{PQ} = 4$, $S_{\triangle ABC} = 32cm^2$. Diện tích tam giác PQR bằng:

- A. $128cm^2$ B. $64cm^2$ C. $16cm^2$ D. $2cm^2$

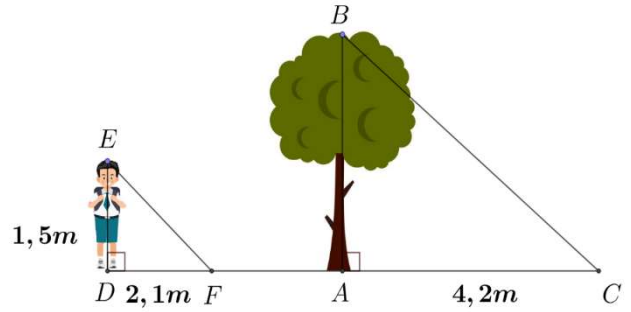
Câu 19. Cho hình vẽ, hãy tính chiều rộng AB của khúc sông (làm tròn đến hàng phần mười).

Biết $AC = 79,6m$; $CD = 34,2m$; $DE = 18,6m$.

- A. $40,25m$ B. $40,3m$
C. $43,3m$ D. $130,65m$



Câu 20. Một người cao $1,5m$ có bóng trên mặt đất dài $2,1m$. Cùng lúc ấy, một cái cây gần đó có bóng trên mặt đất dài $4,2m$. Tính chiều cao của cây. Biết các chùm ánh sáng là song song với nhau.



- A. $2m$ B. $3m$
C. $4m$ D. $5m$

B. Phần tự luận

Dạng 1. Phép cộng, phép trừ, phép nhân, phép chia phân thức đại số

Bài 1.1. Cho hai biểu thức $P = \frac{2x}{x+3} + \frac{x}{x-3} - \frac{3x^2+3}{x^2-9}$ và $Q = \frac{x+1}{x-3}$ với $x \neq \pm 3, x \neq -1$.

- Tính giá trị của biểu thức Q khi x thỏa mãn $|x-2| = 1$.
- Chứng minh biểu thức $P = \frac{-3x-3}{(x-3)(x+3)}$.
- Cho biểu thức $A = P : Q$. Tìm các giá trị của x để $A = \frac{2}{3}$.
- Tìm tất cả giá trị nguyên của x để biểu thức A có giá trị nguyên dương.

Bài 1.2. Cho biểu thức $A = \frac{x+1}{2x-2} - \frac{x-1}{2x+2} + \frac{2}{1-x^2}$.

- Rút gọn biểu thức A .
- Tìm điều kiện xác định của A .
- Tìm tất cả giá trị của x để $A = x$.
- Tìm tất cả giá trị của x để biểu thức $A(x^3+1)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 1.3. Cho hai biểu thức $M = \frac{2}{x+2} - \frac{x}{2-x} - \frac{3x^2-4}{x^2-4}$ và $N = \frac{3}{x-1} + 1$ với $x \neq \pm 2, x \neq 1$.

- Rút gọn và tính giá trị biểu thức N khi $x^2 - x = 0$.
- Biết $B = M.N$. Chứng minh $B = \frac{-2x}{x-1}$.
- Tìm x biết $|B| = 1$.
- Tìm tất cả giá trị nguyên của x để biểu thức B có giá trị nguyên.

Bài 1.4. Cho biểu thức $C = \left(\frac{5x-16}{x^2-4x} + \frac{7}{x-4} \right) : \left(\frac{x+4}{x} - \frac{x}{x-4} \right)$ với $x \neq 0, x \neq 4$.

- Rút gọn biểu thức C .

b) Với giá trị nào của x thì biểu thức C có giá trị nguyên âm lớn nhất.

c) Tìm tất cả giá trị của x thỏa mãn $C^2 = C$.

Dạng 2. Bài toán có lời văn

Bài 2.1. Hôm qua siêu thị niêm yết giá bán dâu tây là x nghìn đồng/kg. Hôm nay siêu thị giảm giá 15 000 đồng cho mỗi kilogam loại dâu tây đó.

a) Với cùng số tiền là y nghìn đồng, hãy viết biểu thức biểu thị số kilogam dâu tây mà hôm nay mua nhiều hơn ngày hôm qua.

b) Nếu với cùng số tiền là 1 150 000 đồng thì hôm nay mua được nhiều hơn hôm qua bao nhiêu kilogam dâu tây khi $x = 115$.

Bài 2.2. Một bể chứa nước có hai vòi nước chảy vào. Biết rằng khi bể không có nước thì vòi thứ nhất chảy một mình đầy bể đó hết x giờ và vòi thứ hai chảy một mình đầy bể đó hết y giờ.

a) Viết phân thức biểu thị thời gian để hai vòi mở cùng lúc chảy đầy bể (ban đầu bể không chứa nước).

b) Tính thời gian cần thiết để hai vòi mở cùng lúc chảy đầy bể (ban đầu bể không chứa nước) khi vòi thứ nhất chảy đầy bể hết 4 giờ và vòi thứ hai chảy đầy bể hết 2 giờ.

Bài 2.3. Một phân xưởng lập kế hoạch may 40 000 chiếc khẩu trang trong x ngày. Nhờ cải tiến kỹ thuật và tăng năng suất lao động nên xưởng đã hoàn thành kế hoạch sớm 2 ngày và làm thêm được 1 400 chiếc khẩu trang so với kế hoạch.

a) Viết phân thức theo biến x biểu thị số khẩu trang mỗi ngày phân xưởng làm theo kế hoạch.

b) Viết phân thức theo biến x biểu thị số khẩu trang mỗi ngày phân xưởng làm trên thực tế.

c) Viết biểu thức theo biến x biểu thị số khẩu trang mỗi ngày phân xưởng may được nhiều hơn kế hoạch.

d) Nếu mỗi ngày phân xưởng may được 2 300 khẩu trang thì mỗi ngày phân xưởng may thêm được bao nhiêu khẩu trang so với kế hoạch?

Bài 2.4. Một xe ô tô dự định đi từ Hà Nội đến Mộc Châu cách nhau 200 km với vận tốc x (km/h) trong một thời gian đã định. Sau khi xe đi được 3 giờ thì dừng lại nghỉ 1 giờ ở đèo Đá Trắng và đường còn lại khó đi nên vận tốc xe phải giảm. Vì vậy xe đến Mộc Châu muộn 1 giờ 30 phút so với dự định.

a) Viết phân thức biểu thị theo x thời gian ô tô dự định đi từ Hà Nội đến Mộc Châu.

b) Viết phân thức biểu thị theo x chiều dài quãng đường từ đèo Đá Trắng đến Mộc Châu.

c) Viết biểu thức biểu thị theo x vận tốc của ô tô trên quãng đường còn lại. Nếu vận tốc ban đầu của ô tô là 50 km/h thì trên quãng đường còn lại vận tốc của ô tô là bao nhiêu km/h?

Dạng 3. Bài hình tổng hợp

Bài 3.1. Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn, $AB < AC$, kẻ các đường cao BE và CF cắt nhau tại H .

a) Chứng minh $\triangle AEB$ đồng dạng với $\triangle AFC$.

b) Chứng minh $\widehat{AEF} = \widehat{ABC}$.

c) Chứng minh $\triangle HEB$ đồng dạng với $\triangle HCB$.

d) Lấy điểm K đối xứng với điểm H qua BC . Gọi M, N là hình chiếu của K trên AB, AC . Chứng minh $\triangle KMB$ đồng dạng với $\triangle KNC$ và MN đi qua trung điểm của HK .

Bài 3.2. Cho $\triangle DEF$ vuông tại D , đường phân giác EK ($K \in DF$). Từ K kẻ đường thẳng vuông góc với EF tại H . Chứng minh:

a) $\triangle DEF$ đồng dạng với $\triangle HKF$.

b) Cho $DE = 9cm, DF = 12cm$. Tính độ dài KF và diện tích tam giác HKF .

c) Qua điểm E kẻ đường thẳng song song với đường thẳng DF cắt tia KH tại điểm N . Gọi I, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng KF, NE . Chứng minh ba điểm Q, H, I là ba điểm thẳng hàng.

Bài 3.3. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A ($AB < AC$), có đường cao AH ($H \in BC$). Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của điểm H trên các cạnh AB, AC .

a) Chứng minh $\triangle AHB$ đồng dạng với $\triangle CHA$ và tính độ dài AH , biết $HB = 3,6cm$ và $HC = 6,4cm$.

b) Chứng minh $AM \cdot AB + AN \cdot AC = 2MN^2$.

c) Qua điểm A kẻ đường thẳng vuông góc với đường thẳng MN cắt đường thẳng BC tại điểm K . Chứng minh K là trung điểm của đoạn thẳng BC .

Bài 3.4. Cho $\triangle ABC$ có $AB = 6cm, AC = 8cm, BC = 10cm$.

a) Tam giác ABC là tam giác gì? Vì sao?

b) Kẻ đường phân giác BD của $\triangle ABC$. Từ điểm C kẻ $CE \perp BD$ tại điểm E . Chứng minh $BD \cdot EC = AD \cdot BC$.

c) Kẻ $EH \perp BC$ tại điểm H . Chứng minh $\frac{CH}{BC} = \left(\frac{AD}{BD}\right)^2$.

Bài 3.5. Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn, $AB < AC$, kẻ các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại điểm H .

a) Chứng minh $\triangle ABH$ đồng dạng với $\triangle ADF$.

b) Chứng minh tia DA là tia phân giác của $\widehat{FDE}$.

c) Đường thẳng EF cắt đoạn thẳng AH tại điểm M , cắt đường thẳng BC tại điểm N . Chứng minh $ME \cdot NF = MF \cdot NE$.

d) Vẽ hình bình hành $AHPE$. Gọi K là trung điểm của đoạn thẳng EF . Chứng minh $BK \perp FP$.

Dạng 4. Bài toán nâng cao

Bài 4.1.

a) Cho các số thực thay đổi $x, y, z \neq 0$ thỏa mãn $x + y + z = 0$. Chứng minh:

$$\frac{x^2}{x^2 - y^2 - z^2} + \frac{y^2}{y^2 - x^2 - z^2} + \frac{z^2}{z^2 - x^2 - y^2} = \frac{3}{2}.$$

b) Với a, b, c là ba số thực thay đổi đôi một khác nhau thỏa mãn $ab + bc + ca = 0$, tính giá trị của biểu thức $P = \frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ac} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab}$.

Bài 4.2. Cho biểu thức $P = \left(\frac{A}{x+1} - \frac{B}{x^2+2} \right) : \left(1 + \frac{1}{x+1} \right)$.

a) Tìm hằng số A và đa thức bậc nhất B để $P = \frac{3}{x^2+2}$.

b) Tìm đa thức bậc nhất A và đa thức bậc hai B để $P = \frac{3}{x^2+2}$.

Bài 4.3. Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn, $AB < AC$, có đường phân giác AD , hai đường cao BE và CF cắt nhau tại điểm H .

a) Chứng minh $\triangle HEF$ đồng dạng với $\triangle HCB$.

b) Vẽ đường thẳng đi qua điểm A và song song với đường thẳng EF , cắt đường thẳng CF tại điểm Q . Nối QD cắt cạnh AB tại điểm K . Gọi I là giao điểm của các đoạn thẳng AD và BE . Chứng minh $KI \parallel EF$.

Bài 4.4.

a) Ba số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 = c^2$ gọi là bộ ba số Pythagore. Tìm các bộ ba số Pythagore trong tập hợp $M = \{6; 8; 10; 15; 17\}$.

b) Chứng minh trong bộ ba số Pythagore luôn có ít nhất một số chia hết cho 5.

c) Cho tập hợp $S = \{1; 2; 3; \dots; 49; 50\}$. Gọi A là một tập hợp con của tập S và tập A có n phần tử. Tìm giá trị nhỏ nhất của n để trong tập A ta luôn chọn được 3 phần tử là độ dài ba cạnh của một tam giác vuông.

C. Đề minh họa

I. TRẮC NGHIỆM (2,0 điểm)

Khoanh tròn vào chữ cái đứng trước phương án đúng.

Câu 1. Áp dụng quy tắc đổi dấu để viết phân thức $\frac{-xy}{y-x}$ (với $x \neq y$) bằng phân thức sau.

A. $\frac{xy}{x+y}$

B. $\frac{-xy}{x+y}$

C. $\frac{xy}{x-y}$

D. $\frac{-xy}{x-y}$

Câu 2. Phân thức đối của phân thức $\frac{-x}{x-3}$ (với $x \neq 3$) là

A. $\frac{-x}{-x-3}$

B. $\frac{-x}{x+3}$

C. $\frac{x-3}{-x}$

D. $\frac{x}{x-3}$

Câu 3. Kết quả phép nhân $\frac{(x-3)(x+3)}{3x} \cdot \frac{6x}{(3-x)^2}$ với $x \neq 0$; $x \neq 3$ là

A. $\frac{2}{x-3}$

B. $\frac{2x+6}{x-3}$

C. $\frac{2}{x+3}$

D. $\frac{2}{(x-3)(x+3)}$

Câu 4. Biểu thức M thỏa mãn $\frac{a+b}{a^2-b^2} = \frac{1}{M}$ với $a \neq b$; $a \neq -b$ là

A. $M = a^2 + ab + b^2$

B. $M = a - b$

C. $M = a + b$

D. $M = a^2 + b^2$

Câu 5 Chọn đáp án đúng khi thực hiện phép tính $\frac{-3x^2+6}{7x^2y^3-5x} - \frac{2x^2-5}{5x-7x^2y^3}$.

A. $\frac{5x^2+1}{7x^2y^3-5x}$.

B. $\frac{-x^2+11}{7x^2y^3-5x}$.

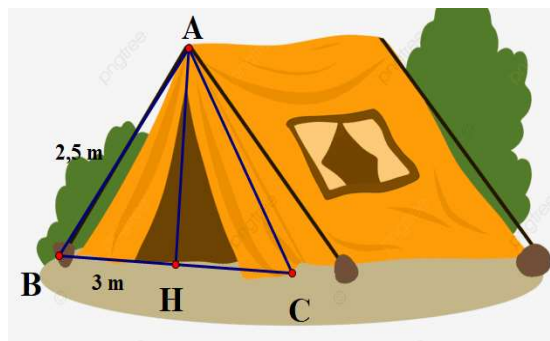
C. $\frac{-x^2+1}{7x^2y^3-5x}$.

D. $\frac{-x^2+1}{14x^2y-10x}$.

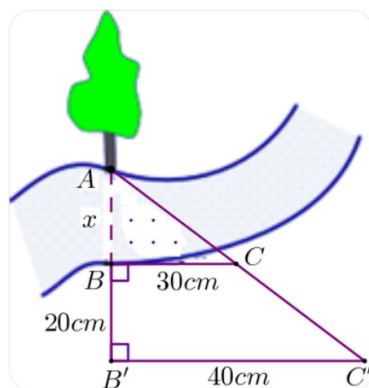
Câu 6. Trong một buổi cắm trại “Kỹ năng sống” nhóm bạn Minh đã dựng một cái lều chữ A (hình bên). Nhóm bạn Minh cần dựng thêm một cây cột AH chính giữa lều. Với số liệu đã cho thì chiều dài cây cột AH là

- A. 4m
C. 2cm

- B. 4cm
D. 2m



Câu 7. Người ta tiến hành đo đạc các yếu tố cần thiết để tính chiều rộng của một khúc sông mà không cần phải sang bờ bên kia (hình vẽ bên). Biết $BB' = 20m$, $BC = 30m$ và $B'C' = 40m$ Tính chiều rộng của khúc sông



- A. 15cm ;

- B. 15m ;

- C. 60cm ;

- D. 60m .

Câu 8. Cho $\Delta ABC \sim \Delta KMN$ có tỉ số đồng dạng là $\frac{3}{2}$. Nếu $AC = 6cm$ thì

- A. $KN = 9cm$

- B. $KM = 4cm$

- C. $KM = 9cm$

- D. $KN = 4cm$

II. TỰ LUẬN (6,0 điểm)

Bài 1. Cho hai biểu thức $P = \frac{3x^2 + 3}{x^2 - 9} - \frac{2x}{x + 3} + \frac{x}{3 - x}$ và $Q = \frac{x + 1}{x - 3}$ với $x \neq \pm 3$, $x \neq -1$

a) Tính giá trị của biểu thức Q khi x thỏa mãn $|x - 1| = 2$.

b) Chứng minh biểu thức $P = \frac{3x + 3}{(x - 3)(x + 3)}$

c) Tìm tất cả giá trị của x để biểu thức A có giá trị dương, biết $A = P : Q$.

Bài 2. Hai chiếc ô tô: Mercedes-Benz W196R và Ferrari

F2003 trong một cuộc thử nghiệm các dòng xe đua

công thức 1 đã đưa ra được kết quả như sau: tại cùng

một thời điểm xuất phát trên cùng một cung đường, xe



Mercedes-Benz W196R đã đi được quãng đường 62,5 km trong x (phút) và xe Ferrari F2003 đã đi được quãng đường 105 km trong $x + 10$ (phút).

- Viết các phân thức biểu thị số vận tốc của mỗi xe và tỉ số về vận tốc của xe thứ nhất so với xe thứ hai.
- Tính giá trị tỉ số giữa vận tốc của xe Mercedes-Benz W196R so với vận tốc của xe Ferrari F2003 trong trường hợp $x = 25$ phút. Trong trường hợp này, vận tốc của xe Ferrari F2003 tăng bao nhiêu phần trăm so với xe Mercedes-Benz W196R.

Bài 3. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM . Phân giác của các góc AMB và AMC lần lượt cắt hai đoạn thẳng AB, AC ở D và E .

- Chứng minh $DE \parallel BC$;
- Biết $\frac{DA}{DB} = \frac{2}{5}$, $AC = 12cm$, $BC = 15cm$. Tính độ dài các đoạn thẳng AE, EC, DE, AM ;
- Gọi I là giao điểm của AM và DE . Đường thẳng BI cắt AC tại N và cắt đường thẳng qua C song song với đường thẳng AB tại K . Chứng minh $BI^2 = IN \cdot IK$.

Bài 4. Cho $x; y; z$ đôi một khác nhau thỏa mãn: $\frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{y+z} + \frac{z^2}{z+x} = 2020$.

Tính giá trị biểu thức: $P = \frac{y^2}{x+y} + \frac{z^2}{y+z} + \frac{x^2}{z+x} - 2024$.

.....**Hết**.....

Chúc các con ôn tập tốt!