

Câu I. (4,0 điểm)

1. Rút gọn $A = \sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7}$.

2. Cho các số dương a, b thỏa mãn $a + b = \sqrt{2024 - a^2} + \sqrt{2024 - b^2}$.

Tính giá trị của biểu thức $P = a^2 + b^2$.

Câu II. (4,0 điểm)

1. Giả sử đa thức $P(x) = x^5 - 6x^3 + x^2 + 9x - 3$ có 5 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 . Xét đa thức $Q(x) = x^2 - 2$. Tính $F = Q(x_1)Q(x_2)Q(x_3)Q(x_4)Q(x_5)$.

2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} y - 6x^2 + xy^2 = 0 \\ 1 - 5x^2 + x^2y^2 = 0 \end{cases}$$

Câu III. (4,0 điểm)

1. Cho A là số nguyên dương và phương trình nghiệm nguyên $ax + by = c$ với các hệ số nguyên a, b, c thỏa mãn a, b nguyên tố cùng nhau, $|a| \leq |b| \leq A$. Chứng minh số nghiệm nguyên (x, y) thỏa mãn điều kiện $|x| \leq A, |y| \leq A$ của phương trình đã cho không vượt quá $\frac{3A}{|b|}$.

2. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho $(3^n - 1) : 2^{2023}$.

Câu IV. (6,0 điểm)

1. Gọi O là giao điểm ba đường phân giác trong của tam giác ABC . Đường thẳng qua O và vuông góc với CO cắt CA tại M , cắt CB tại N . Chứng minh rằng:

a) Tam giác AOM đồng dạng với tam giác OBN .

b) $\frac{AM}{AC} + \frac{BN}{BC} + \frac{OC^2}{AC \cdot BC} = 1$.

2. Cạnh BC của tam giác ABC tiếp xúc với đường tròn nội tiếp (O) của tam giác đó tại điểm D . Chứng minh rằng tâm O của đường tròn này nằm trên đường thẳng đi qua trung điểm của các đoạn thẳng BC và AD .

Câu V. (2,0 điểm) Tìm tất cả các tập hợp $A \neq \emptyset$ gồm hữu hạn các số thực sao cho $\forall x \in A$ thì $x + 1 - x^2 \in A$ và $x - 1 + x^2 \in A$.

----- Hết -----

Họ và tên thí sinh:.....Số báo danh:.....

Chữ ký của giám thị 1:..... Chữ ký của giám thị 2:.....

Câu I. (4,0 điểm)

1. (2,0 điểm) Rút gọn $A = \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$.

Giải. Ta có $A = \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} = \sqrt[3]{2\sqrt{2}+3.2+3\sqrt{2}+1} - \sqrt[3]{2\sqrt{2}-3.2+3\sqrt{2}-1}$ (1,0 điểm)

$$= \sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)^3} - \sqrt[3]{(\sqrt{2}-1)^3} = \sqrt{2}+1 - \sqrt{2}+1 = 2. \quad (1,0 \text{ điểm})$$

2. (2,0 điểm) Cho các số dương a, b thỏa mãn $a+b = \sqrt{2024-a^2} + \sqrt{2024-b^2}$. Tính giá trị của biểu thức $P = a^2 + b^2$.

Giải. Từ $a+b = \sqrt{2024-a^2} + \sqrt{2024-b^2} \Rightarrow a - \sqrt{2024-b^2} = \sqrt{2024-a^2} - b$ (0,5 điểm)

$$\Rightarrow \frac{a^2 - (2024 - b^2)}{a + \sqrt{2024 - b^2}} = \frac{(2024 - a^2) - b^2}{\sqrt{2024 - a^2} + b} \Rightarrow \frac{a^2 + b^2 - 2024}{a + \sqrt{2024 - b^2}} = \frac{2024 - a^2 - b^2}{\sqrt{2024 - a^2} + b} \quad (0,5 \text{ điểm})$$

$$\Rightarrow \frac{a^2 + b^2 - 2024}{a + \sqrt{2024 - b^2}} + \frac{a^2 + b^2 - 2024}{\sqrt{2024 - a^2} + b} = 0 \Rightarrow (a^2 + b^2 - 2024) \left(\frac{1}{a + \sqrt{2024 - b^2}} + \frac{1}{\sqrt{2024 - a^2} + b} \right) = 0 \quad (0,5 \text{ điểm})$$

$$\text{Vì } \frac{1}{a + \sqrt{2024 - b^2}} + \frac{1}{\sqrt{2024 - a^2} + b} > 0 \text{ nên ta có } a^2 + b^2 - 2024 = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 = 2024.$$

$$\text{Vậy } P = 2024. \quad (0,5 \text{ điểm})$$

Câu II. (4,0 điểm)

1. (2,0 điểm) Giả sử đa thức $P(x) = x^5 - 6x^3 + x^2 + 9x - 3$ có 5 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 . Xét đa thức $Q(x) = x^2 - 2$. Tính $F = Q(x_1)Q(x_2)Q(x_3)Q(x_4)Q(x_5)$.

Giải. Vì đa thức $P(x) = x^5 - 6x^3 + x^2 + 9x - 3$ có 5 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 nên đa thức $P(x)$ có thể viết dưới dạng $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)$. (0,5 điểm)

Khi đó:

$$F = Q(x_1)Q(x_2)Q(x_3)Q(x_4)Q(x_5) = (x_1^2 - 2)(x_2^2 - 2)(x_3^2 - 2)(x_4^2 - 2)(x_5^2 - 2) \quad (0,5 \text{ điểm})$$

$$= (\sqrt{2} - x_1)(\sqrt{2} - x_2)(\sqrt{2} - x_3)(\sqrt{2} - x_4)(\sqrt{2} - x_5)(-\sqrt{2} - x_1)(-\sqrt{2} - x_2)(-\sqrt{2} - x_3)(-\sqrt{2} - x_4)(-\sqrt{2} - x_5) \\ = P(\sqrt{2})P(-\sqrt{2}) \quad (0,5 \text{ điểm})$$

$$= \left[(\sqrt{2})^5 - 6(\sqrt{2})^3 + (\sqrt{2})^2 + 9(\sqrt{2}) - 3 \right] \cdot \left[(-\sqrt{2})^5 - 6(-\sqrt{2})^3 + (-\sqrt{2})^2 + 9(-\sqrt{2}) - 3 \right]$$

$$= (-1 + \sqrt{2})(-1 - \sqrt{2}) = -1. \text{ Vậy } F = -1. \quad (0,5 \text{ điểm})$$

2. (2,0 điểm) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} y - 6x^2 + xy^2 = 0 \\ 1 - 5x^2 + x^2y^2 = 0 \end{cases}.$$

Giải. Viết lại hệ
$$\begin{cases} y + xy^2 = 6x^2 \\ 1 + x^2y^2 = 5x^2 \end{cases}.$$
 Ta thấy $x = 0$ không thỏa mãn.

Xét $x \neq 0$, hệ tương đương với
$$\begin{cases} \frac{1}{x^2}y + \frac{1}{x}y^2 = 6 \\ \frac{1}{x^2} + y^2 = 5 \end{cases}.$$
 (0,5 điểm)

Đặt $\frac{1}{x} = z$ ta có hệ
$$\begin{cases} z^2y + zy^2 = 6 \\ z^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} yz(y+z) = 6 \\ (y+z)^2 - 2yz = 5 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} S = y + z \\ P = yz \end{cases}$ ta có hệ
$$\begin{cases} SP = 6 \\ S^2 - 2P = 5 \end{cases} \quad (0,5 \text{ điểm})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} SP = 6 \\ P = \frac{S^2 - 5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S \cdot \frac{S^2 - 5}{2} = 6 \\ P = \frac{S^2 - 5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - 5S - 12 = 0 \\ P = \frac{S^2 - 5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (S - 3)(S^2 + 3S + 4) = 0 \\ P = \frac{S^2 - 5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 3 \\ P = 2 \end{cases}$$

(0,5 điểm)

Từ đó ta có
$$\begin{cases} 3 = y + z \\ 2 = yz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ z = 1 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases} \text{ dẫn đến } \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \\ y = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm $(x; y)$ là $(1; 2)$ và $(\frac{1}{2}; 1)$. (0,5 điểm)

Câu III. (4,0 điểm)

1. (2,0 điểm) Cho A là số nguyên dương và phương trình nghiệm nguyên $ax + by = c$ với các hệ số nguyên a, b, c thỏa mãn a, b nguyên tố cùng nhau, $|a| \leq |b| \leq A$. Chứng minh số nghiệm nguyên (x, y) thỏa mãn điều kiện $|x| \leq A, |y| \leq A$ của phương trình đã cho không vượt quá $\frac{3A}{|b|}$.

Giải.

+) Trường hợp 1: $a = 0$

Vì $(a, b) = 1$ suy ra $b = \pm 1$ như vậy phương trình đã cho có dạng $y = c$ hoặc $y = -c$. Trong các phương trình này số nghiệm nguyên (x, y) của phương trình thỏa mãn điều kiện $|x| \leq A, |y| \leq A$ không vượt quá số điểm nguyên trên đoạn $[-A; A]$ tức là số nghiệm nguyên đó nhỏ hơn hoặc bằng

$$2A + 1 \leq 3A = \frac{3A}{|b|}.$$

+) Trường hợp 2: $b = 0$

Tương tự như Trường hợp 1 ta cũng có được số nghiệm nguyên đó nhỏ hơn hoặc bằng $\frac{3A}{|b|}$.

(0,5 điểm)

+) Trường hợp 3: $a \neq 0, b \neq 0$

Ta thấy rằng nếu (x, y) và (x', y') là 2 nghiệm khác nhau của phương trình $ax + by = c$. Ta có

$$\begin{cases} ax + by = c \\ ax' + by' = c \end{cases} \Rightarrow a(x - x') = b(y' - y). \text{ Vì } (a, b) = 1 \Rightarrow x - x' : b \Rightarrow |x - x'| \geq |b| \quad (0,5 \text{ điểm})$$

Giả sử $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ là tất cả các nghiệm nguyên khác nhau của phương trình thỏa mãn $|x_i| \leq A, |y_i| \leq A, \forall i = \overline{1, n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

Vì nếu $x_i = x_j \Rightarrow y_i = y_j \quad \forall i, j = \overline{1, n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$ nên không mất tính tổng quát, giả sử $x_1 < x_2 < \dots < x_n$.

$$\text{Khi đó ta có } \begin{cases} x_2 - x_1 \geq |b| \\ x_3 - x_2 \geq |b| \\ \dots \\ x_n - x_{n-1} \geq |b| \end{cases} \Rightarrow x_n - x_1 \geq (n-1)|b| \quad (1) \quad (0,5 \text{ điểm})$$

$$\text{Mặt khác } x_1 \in [-A; A], x_n \in [-A; A] \Rightarrow x_n - x_1 \leq 2A \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } 2A \geq (n-1)|b| \Leftrightarrow 2A + |b| \geq n|b|$$

$$\text{Vì } |b| \leq A \Rightarrow 3A \geq n|b| \Rightarrow n \leq \frac{3A}{|b|} \quad (\text{ĐPCM}). \quad (0,5 \text{ điểm})$$

2. (2,0 điểm) Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho $(3^n - 1) : 2^{2023}$

Giải.

Đặt $n = 2^k \cdot l$ với $k, l \in \mathbb{N}$ và l là số lẻ, ta có

$$A = 3^n - 1 = \left(3^{2^k}\right)^l - 1 = \left(3^{2^k} - 1\right) \left[\left(3^{2^k}\right)^{l-1} + \left(3^{2^k}\right)^{l-2} + \dots + \left(3^{2^k}\right)^1 + 1 \right] \quad (0,5 \text{ điểm})$$

$$\text{Vì } l \text{ là số lẻ nên } \left[\left(3^{2^k}\right)^{l-1} + \left(3^{2^k}\right)^{l-2} + \dots + \left(3^{2^k}\right)^1 + 1 \right] \not\equiv 2 \text{ suy ra } A : 2^{2023} \Leftrightarrow B = 3^{2^k} - 1 : 2^{2023}$$

Ta có $B = (3^{2^{k-1}})^2 - 1 = (3^{2^{k-1}} + 1)(3^{2^{k-1}} - 1) = (3^{2^{k-1}} + 1)(3^{2^{k-2}} + 1) \dots (3^{2^1} + 1)(3^{2^1} - 1)$ (0,5 điểm)

Do $\begin{cases} 3^{2^i} + 1 : 2 \\ 3^{2^i} + 1 \not\vdots 4 \end{cases} \forall i = \overline{1, k-1}$ và $3^{2^1} - 1 = 8$ nên $\begin{cases} B : 2^{k-1} \cdot 8 \\ B \not\vdots 2^k \cdot 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B : 2^{k+2} \\ B \not\vdots 2^{k+3} \end{cases}$. (0,5 điểm)

Dẫn đến khi phân tích ra thừa số nguyên tố thì B có đúng $k+2$ thừa số 2.

Suy ra $B : 2^{2023} \Leftrightarrow k+2 \geq 2023 \Leftrightarrow k \geq 2021$. Kiểm tra $n = 2^{2021}$ thấy thỏa mãn.

Như vậy số nguyên dương n nhỏ nhất là 2^{2021} . (0,5 điểm)

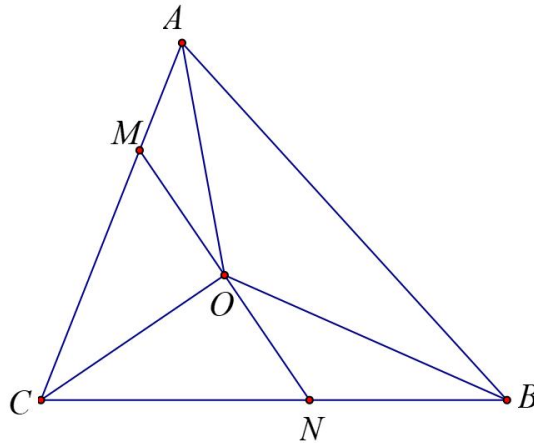
Câu IV. (6,0 điểm)

1. (4,0 điểm) Gọi O là giao điểm ba đường phân giác trong của tam giác ABC . Đường thẳng qua O và vuông góc với CO cắt CA tại M , cắt CB tại N . Chứng minh rằng:

a) Tam giác AOM đồng dạng với tam giác OBN .

b) $\frac{AM}{AC} + \frac{BN}{BC} + \frac{OC^2}{AC \cdot BC} = 1$

Giải. a) (2,0 điểm)



Ta có:

$$\widehat{OMC} = 90^\circ - \frac{\widehat{C}}{2} = \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{C}) = \frac{1}{2}(\widehat{A} + \widehat{B}) \quad (1) \quad (0,5 \text{ điểm})$$

$$\text{mà } \widehat{OMC} = \widehat{MAO} + \widehat{MOA} \text{ (góc ngoài tam giác OMA)} \Rightarrow \widehat{OMC} = \frac{\widehat{A}}{2} + \widehat{MOA} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1); (2) suy ra } \widehat{MOA} = \frac{\widehat{B}}{2} \text{ suy ra tam giác AOM đồng dạng với tam giác ABO (3).} \quad (0,5 \text{ điểm})$$

$$\text{Tương tự } \widehat{ONC} = 90^\circ - \frac{\widehat{C}}{2} = \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{C}) = \frac{1}{2}(\widehat{A} + \widehat{B}) \quad (4)$$

$$\text{mà } \widehat{ONC} = \widehat{NBO} + \widehat{NOB} \text{ (góc ngoài tam giác ONB)} \Rightarrow \widehat{ONC} = \frac{\widehat{B}}{2} + \widehat{NOB} \quad (5) \quad (0,5 \text{ điểm})$$

Chứng minh tương tự tam giác EOB vuông tại O suy ra tam giác EOI đồng dạng với tam giác OBD

$$\text{suy ra } \frac{EI}{OD} = \frac{OI}{BD} \Leftrightarrow IE \cdot BD = R^2 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } IF \cdot DC = IE \cdot BD \Leftrightarrow \frac{IF}{BD} = \frac{IE}{DC} \Rightarrow \frac{IF}{JC} = \frac{IE}{BJ} \quad (0,5 \text{ điểm})$$

Mà $EF \parallel BC$ suy ra $EB; IJ; CF$ đồng quy hay A, I, J thẳng hàng.

Trong tam giác DAJ có $M; O; N$ lần lượt là trung điểm của $AD; DI; JD$ nên M, O, N thẳng hàng (ĐPCM). (0,5 điểm)

Câu V. (2,0 điểm) Tìm tất cả các tập hợp $A \neq \emptyset$ gồm hữu hạn các số thực sao cho $\forall x \in A$ thì $x+1-x^2 \in A$ và $x-1+x^2 \in A$.

Giải. Đặt $f(x) = -x^2 + x + 1$; $g(x) = x^2 + x - 1$

Do $A \neq \emptyset$ và hữu hạn nên gọi x_1, x_2 lần lượt là phần tử lớn nhất và phần tử nhỏ nhất của A .

$$\text{Vì } f(x_1) \in A; g(x_1) \in A \Rightarrow \begin{cases} f(x_1) \leq x_1 \\ g(x_1) \leq x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-x_1^2 \leq 0 \\ x_1^2-1 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = \pm 1.$$

Tương tự $x_2 = \pm 1$. (0,5 điểm)

Xét các trường hợp:

Nếu A có 1 phần tử thì $A = \{-1\}$; $A = \{1\}$ thử lại thấy thỏa mãn.

Nếu A có 2 phần tử thì $A = \{-1\}$; $A = \{1\}$ thử lại thấy thỏa mãn. (0,5 điểm)

Nếu A có hơn 2 phần tử thì $-1 \in A$; $1 \in A$ (do $-1, 1$ lần lượt là phần tử nhỏ nhất và phần tử lớn nhất của A). Gọi $x_0 \in A$; $x_0 \neq \pm 1 \Rightarrow -1 < x_0 < 1$

Nếu $0 < x_0 < 1 \Rightarrow 1 + x_0 - x_0^2 > 1$ vô lí;

Nếu $-1 < x_0 < 0 \Rightarrow -1 + x_0 + x_0^2 < -1$ vô lí (0,5 điểm)

Suy ra $x_0 = 0$ và $A = \{-1; 0; 1\}$ thử lại thấy thỏa mãn.

Vậy các tập hợp A thỏa mãn đề bài là $A = \{-1\}$; $A = \{1\}$; $A = \{-1; 1\}$; $A = \{-1; 0; 1\}$. (0,5 điểm)

----- Hết -----

