

Câu I: (4 điểm)

1) Cho biểu thức: $A = \left(\frac{x+1}{x^3+1} - \frac{1}{x-x^2-1} - \frac{2}{x+1} \right) : \frac{x^3-2x^2}{x^3-x^2+x}$.

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên.

2) Cho các số a, b, c khác 0 và đôi một khác nhau thỏa mãn:

$$a^2(b+c) = b^2(c+a) = 2023. \quad \text{Tính } M = c^2(a+b)$$

Câu II: (4 điểm)

1) Tìm x biết: $(x-1)x(x+1)(x+2) = 24$

2) Tìm a, b đôi một khác nhau thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

$$a^3 - 3a^2 + 5a - 2023 = 0; \quad b^3 - 3b^2 + 5b + 2017 = 0; \quad \text{và } a - b = 4$$

Câu III: (4 điểm)

1) Tìm x, y nguyên thỏa mãn: $5x^4 + y^2 - 4x^2y - 85 = 0$

2) Cho ba số nguyên x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 = 2z^2$.

Chứng minh rằng $x^2 - y^2$ chia hết cho 48.

Câu IV: (6 điểm)

Cho ΔABC vuông tại A, có $\widehat{ABC} = 75^\circ$, trên cạnh AC lấy 2 điểm E và P sao cho $\widehat{ABE} = \widehat{EBP} = \widehat{PBC}$, Gọi I là chân đường vuông góc hạ từ C xuống đường thẳng BP, đường thẳng CI cắt BE ở F

1, Chứng minh: ΔECF cân

2, Trên tia đối tia EB lấy điểm K sao cho $EK=BC$, tính số đo các góc của ΔBCK

3, Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên BK, D là trung điểm của đoạn CH, L là hình chiếu vuông góc của H trên BD. Chứng minh KL vuông góc với LC

Câu V: (2 điểm)

Cho x, y, z là 3 số thực tùy ý thỏa mãn $x + y + z = 0$ và $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của $A = x^{24} + y^{12} + z^{2024}$

..... Hết.....

HƯỚNG DẪN CHẤM THI HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN LỚP 8

Câu		Nội dung	Điểm
Câu I 4.0đ	1	1) Cho biểu thức: $A = \left(\frac{x+1}{x^3+1} - \frac{1}{x-x^2-1} - \frac{2}{x+1} \right) : \frac{x^3-2x^2}{x^3-x^2+x}$. a) Rút gọn biểu thức A. b) Tìm giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên.	
		a) $A = \left(\frac{x+1}{x^3+1} - \frac{1}{x-x^2-1} - \frac{2}{x+1} \right) : \frac{x^3-2x^2}{x^3-x^2+x}$ $\text{ĐK } x \neq 0; x \neq -1; x \neq 2$	0,25
		$A = \left[\frac{x+1}{(x+1)(x^2-x+1)} + \frac{1}{x^2-x+1} - \frac{2}{x+1} \right] : \frac{x^3-2x^2}{x^3-x^2+x}$ $A = \left[\frac{x+1+x+1-2(x^2-x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} \right] : \frac{x^2(x-2)}{x(x^2-x+1)}$	0,25
		$A = \left[\frac{x+1+x+1-2x^2+2x-2}{(x+1)(x^2-x+1)} \right] : \frac{x(x-2)}{x^2-x+1}$ $A = \frac{-2x^2+4x}{(x+1)(x^2-x+1)} \cdot \frac{x^2-x+1}{x(x-2)}$	0,25
		$A = \frac{-2x(x-2)}{(x+1)(x^2-x+1)} \cdot \frac{x^2-x+1}{x(x-2)} = \frac{-2}{x+1}$ Vậy $A = \frac{-2}{x+1}$ với $x \neq 0; x \neq -1; x \neq 2$	0,25
		b) Ta có $A = \frac{-2}{x+1}$ với $x \neq 0; x \neq -1; x \neq 2$ Vì x nguyên $x \neq 0; x \neq -1; x \neq 2$ nên x+1 nguyên và x+1 khác 0. Để A có giá trị nguyên khi x+1 là ước của 2. Mà ước của 2 là -1; 1; -2; 2.	0,25
		$x+1=1 \Leftrightarrow x=0$ (không thỏa mãn) $x+1=-1 \Leftrightarrow x=-2$ (thỏa mãn)	0,25
		$x+1=2 \Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn) $x+1=-2 \Leftrightarrow x=-3$ (thỏa mãn)	0,25
		Vậy A nguyên khi $x \in \{-3; -2; 1\}$	0,25

		2) Cho các số a, b, c khác 0 và đôi một khác nhau thoả mãn: $a^2(b+c) = b^2(c+a) = 2023.$ Tính M = c²(a+b)	
	2	Ta có: $a^2(b+c) = b^2(c+a)$ $\Leftrightarrow a^2b - ab^2 + ca^2 - cb^2 = 0 \Leftrightarrow ab(a-b) + c(a-b)(a+b) = 0$ $\Leftrightarrow (a-b)(ab+bc+ac) = 0$ $\Rightarrow ab+bc+ca = 0$ (Vì a khác b)	1,0
		Lại có: $c^2(a+b) - a^2(b+c) = ac^2 - a^2c + bc^2 - a^2b = ac(c-a) + b(c-a)(c+a)$ $= (c-a)(ac+bc+ab) = 0$ Do $ab+bc+ca = 0$	0,75
		Vậy với a, b, c thoả mãn yêu cầu đề bài thì M = 2023	0,25
Câu II 4.0đ	1	1) Tìm x biết: $(x-1)x(x+1)(x+2) = 24$ Ta có: $(x-1)x(x+1)(x+2) = 24$ $\Leftrightarrow (x-2)(x+3) \left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} \right] = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases}$ Vậy $x \in \{-3; 2\}$	1.5 0.5
	2	2) Tìm a, b đôi một khác nhau thoả mãn đồng thời các điều kiện sau: $a^3 - 3a^2 + 5a - 2023 = 0$; $b^3 - 3b^2 + 5b + 2017 = 0$; và a - b = 4 Từ các điều kiện đã cho ta có $(a-1)^3 + 2(a-1) - 2020 = 0$ (1), $(b-1)^3 + 2(b-1) + 2020 = 0$ (2) Cộng tương ứng vế với vế của (1) và (2) ta có: $(a-1)^3 + (b-1)^3 + 2(a+b-2) = 0$ $\Leftrightarrow (a+b-2) \left[(a-1)^2 - (a-1)(b-1) + (b-1)^2 \right] + 2(a+b-2) = 0$ $\Leftrightarrow (a+b-2) \left[(a-1)^2 - (a-1)(b-1) + (b-1)^2 + 2 \right] = 0$ $\forall x \quad (a-1)^2 - (a-1)(b-1) + (b-1)^2 + 2$ $= \frac{1}{2}(a-b)^2 + \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{2}(b-1)^2 + 2 > 0 \quad \forall a, b$ $\Rightarrow a+b-2 = 0 \Leftrightarrow a+b = 2 \quad (*)$ Lại có: $a - b = 4 \quad (**)$ Từ (*) và (**) tìm được $a = 3$ và $b = -1$ Thử lại ta thấy $a = 3$ và $b = -1$ không thoả mãn Vậy không tồn tại giá trị a, b thoả mãn yêu cầu đề bài.	0.5 0.5 0.5
Câu III 4.0đ	1	1) Tìm x, y nguyên thoả mãn: $5x^4 + y^2 - 4x^2y - 85 = 0$ Từ đẳng thức trên ta có: $x^4 = 85 - (y - 2x^2)^2$	0.5

Câu IV 6.0đ		Lập luận $x^4 \leq 85 < 4^4$ Mà $x \in Z$ Suy ra $x^4 \in \{0^4; 1^4; 2^4; 3^4\}$ $x^4 = 0^4$ thì $y^2 = 85$ (loại) $x^4 = 1^4$ thì $(y-2)^2 = 84$ (loại) $x^4 = 2^4$ thì $(y-8)^2 = 69$ (loại) $x^4 = 3^4$ thì $(y-18)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} y-18=2 \\ y-18=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=20 \\ y=16 \end{cases}$ Khi đó $\begin{cases} x=3 \\ x=-3 \end{cases}$ Vậy có 4 cặp $(x;y)$ là: $(3 ; 20); (-3 ; 20); (3 ; 16); (-3 ; 16)$	1.25 0.25
	2	2) Cho ba số nguyên x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 = 2z^2$. Chứng minh rằng $x^2 - y^2$ chia hết cho 48.	
		Vì $x^2 + y^2 = 2z^2$ nên x, y cùng tính chẵn lẻ. Suy ra : $x-y, x+y$ cùng chẵn. Đặt $x+y=2m, x-y=2n \quad (m, n \in N^*, m > n)$ $\Rightarrow 2z^2 = (m+n)^2 + (m-n)^2 = 2(m^2 + n^2) \Rightarrow z^2 = m^2 + n^2$	0,5
		Nếu m và n cùng không chia hết cho 4 thì $m^2 + n^2$ chia cho 4 dư 2 $\Rightarrow z^2 = m^2 + n^2$ chia cho 4 dư 2. Vô lí. Suy ra m hoặc n chia hết cho 4 $\Rightarrow mn:4$ (1)	0,5
		Nếu m và n cùng không chia hết cho 3 thì $m^2 + n^2$ chia cho 3 dư 2 $\Rightarrow z^2 = m^2 + n^2$ chia cho 3 dư 2. Vô lí. Suy ra m hoặc n chia hết cho 3 $\Rightarrow mn:3$ (2)	0,5
		Vì $(3,4)=1$ nên từ (1), (2) $\Rightarrow mn:12$ $\Rightarrow x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) = 4mn:48$ Vậy $x^2 - y^2:48$	0,5
		Cho ΔABC vuông tại A, có $\widehat{ABC} = 75^\circ$, trên cạnh AC lấy 2 điểm E và P sao cho $\widehat{ABE} = \widehat{EBP} = \widehat{PBC}$, Gọi I là chân đường vuông góc hạ từ C xuống đường thẳng BP, đường thẳng CI cắt BE ở F 1, Chứng minh: ΔECF cân 2, Trên tia đối tia EB lấy điểm K sao cho $EK=BC$, tính số đo các góc của ΔBCK 3, Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên BK, D là trung điểm của đoạn CH, L là hình chiếu vuông góc của H trên BD. Chứng minh KL vuông góc với LC	

	1	1, Vì $\widehat{ABE} = \widehat{EBP} = \widehat{PBC} = \frac{\widehat{ABC}}{3} = 25^\circ$ $\Rightarrow \widehat{EBP} = \widehat{PBC} \Rightarrow BI$ là phân giác, mà $BI \perp FC$ Nên $\triangle BFC$ có BI vừa là phân giác vừa là đường cao $\Rightarrow \triangle BFC$ là tam giác cân tại B $\Rightarrow \widehat{F_1} = \frac{180^\circ - 50^\circ}{2} = 65^\circ = \widehat{E_1} \Rightarrow \triangle ECF$ cân tại C	1.0 1.0
	2	2, $\triangle BFC$ có BI vừa là đường cao vừa là tia phân giác $\Rightarrow BC=BF$ mà $BC=EK \Rightarrow BF=EK$ $\Rightarrow BE+EF=EF+FK \Rightarrow BE=FK$ Mà $\widehat{E_1} = \widehat{F_1} \Rightarrow \widehat{E_2} = \widehat{F_2} \Rightarrow \triangle BEC = \triangle KFC (c.g.c)$ $\Rightarrow BC=CK \Rightarrow \triangle BCK$ là tam giác cân tại C $\Rightarrow \widehat{CBK} = 50^\circ = \widehat{CKB}$, vậy $\widehat{BCK} = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$	0.5 0.5 0.5 0.5
IV	3	3, Vẽ hình chữ nhật $CHKM$ Chứng minh : $BCMH$ là hình bình hành (vì có $CM \parallel BH$ và $CM = BH$ do H là trung điểm BK, bởi tam giác BCK cân tại C) suy ra L, D, M thẳng hàng $\Rightarrow LO = \frac{1}{2}HM = \frac{1}{2}CK$ ($HM = CK$, tính chất hình chữ nhật) Suy ra tam giác CLK vuông tại L	1,0 1,0
Câu V		+) Trong ba số x, y, z có ít nhất hai số cùng dấu. Giả sử $x, y \geq 0$ $\Rightarrow z = -x - y \leq 0$ (do $x + y + z = 0$) +) Vì $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1$ $\Rightarrow x^{24} + y^{12} + z^{2024} \leq x + y + z$ $\Rightarrow x^{24} + y^{12} + z^{2024} \leq x + y - z$ $\Rightarrow x^{24} + y^{12} + z^{2024} \leq -2z$ +) $-1 \leq z \leq 1$ và $z \leq 0 \Rightarrow x^{24} + y^{12} + z^{2024} \leq 2$ Dấu bằng xảy ra khi $z = -1$ và $x + y = 1$	0.5 0.5 0.5

	KL: Vậy $\text{Max } A = 2$ khi một số bằng -1 và tổng hai số còn lại bằng 1	0,5
--	--	-----

Chú ý :

1. Học sinh giải cách khác đúng thì cho điểm tối đa.
2. Bài hình không vẽ hình, hoặc hình sai cơ bản thì không chấm điểm.