

Câu I. (2,0 điểm)

1. Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{45} - \frac{8}{\sqrt{5}-1} + \sqrt{14-6\sqrt{5}}$.

2. Cho biểu thức $B = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+2} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-2} - \frac{4\sqrt{a}-1}{4-a} \right) : \frac{1}{\sqrt{a}+2}$ (với $a \geq 0, a \neq 4$).

a. Rút gọn biểu thức B .

b. Tìm tất cả các giá trị nguyên của a để biểu thức B nhận giá trị dương.

Câu II. (2,0 điểm)

1. Giải phương trình $(\sqrt{x}-1)^2 - \sqrt{x} - 5 = 0$.

2. Hai lớp 9A và 9B quyên góp ủng hộ sách giáo khoa cũ cho các bạn ở vùng cao. Lớp 9A mỗi bạn ủng hộ 2 quyển sách, lớp 9B mỗi bạn ủng hộ 3 quyển sách. Biết số học sinh cả hai lớp là 75 em và số quyển sách cả hai lớp quyên góp được là 190 quyển. Tính số học sinh ở mỗi lớp.

Câu III. (1,5 điểm)

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng (d) có phương trình $y = -3x + 2$ và đường thẳng (Δ) có phương trình $y = (m^2 - 7)x + m$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng (d) song song với đường thẳng (Δ) .

2. Cho phương trình $x^2 - 3(m-1)x - 1 = 0$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + 4x_2^2 = 3x_1 - 6x_2 - 4$.

Câu IV. (4,0 điểm) Cho đường tròn $(O; R)$ có hai đường kính AB và MN (M, N không trùng với các điểm A, B). Các đường thẳng BM, BN cắt tiếp tuyến kẻ từ điểm A của đường tròn $(O; R)$ lần lượt tại các điểm E, F .

1. Chứng minh $AM \parallel BF$.

2. Chứng minh tứ giác $MNFE$ nội tiếp đường tròn.

3. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AE, AF . Kẻ đường thẳng PI vuông góc với BQ (I là điểm thuộc BQ), đường thẳng PI cắt OA tại H . Chứng minh H là trung điểm của AO .

4. Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác BPQ theo R khi hai đường kính AB và MN thay đổi.

Câu V. (0,5 điểm) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a}{b^2} + \frac{b}{c^2} + \frac{c}{a^2} + \frac{9}{2(a+b+c)}$.

--- HẾT ---

Thí sinh được sử dụng máy tính bỏ túi không có chức năng soạn thảo văn bản và không có thẻ nhớ.

Lời giải tham khảo đề toán chung 2024-2025

Cù Thanh Bình (THPT Chuyên Biên Hòa - Hà Nam)

1. ĐỀ BÀI

Câu 1. (2, 0 điểm)

1. Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{45} - \frac{8}{\sqrt{5}-1} + \sqrt{14-6\sqrt{5}}$
2. Cho biểu thức $B = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+2} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-2} - \frac{4\sqrt{a}-1}{4-a} \right) : \frac{1}{\sqrt{a}+2}$ (với $a \geq 0, a \neq 4$)
a, Rút gọn biểu thức B .
b, Tìm tất cả các giá trị nguyên của a để biểu thức B nhận giá trị dương

Câu 2. (2, 0 điểm)

1. Giải phương trình $(\sqrt{x} - 1)^2 - \sqrt{x} - 5 = 0$
2. Hai lớp 9A và 9B quyên góp ủng hộ sách giáo khoa cũ cho các bạn ở vùng cao. Lớp 9A mỗi bạn ủng hộ 2 quyển sách, lớp 9B mỗi bạn ủng hộ 3 quyển sách. Biết số học sinh cả hai lớp là 75 em và số quyển sách cả hai lớp quyên góp được là 190 quyển. Tính số học sinh ở mỗi lớp.

Câu 3. (1, 5 điểm)

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng (d) có phương trình $y = -3x + 2$ và đường thẳng (Δ) có phương trình $y = (m^2 - 7)x + m$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng (d) song song với đường thẳng (Δ) .
2. Cho phương trình $x^2 - 3(m - 1)x - 1 = 0$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + 4x_2^2 = 3x_1 - 6x_2 - 4$

Câu 4. (4, 0) điểm Cho đường tròn $(O; R)$ có hai đường kính AB và MN (M, N không trùng với các điểm A, B). Các đường thẳng BM, BN cắt tiếp tuyến kẻ từ A của đường tròn $(O; R)$ lần lượt tại các điểm E, F .

1. Chứng minh $AM // BF$
2. Chứng minh tứ giác $MNFE$ nội tiếp đường tròn
3. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AE, AF . Kẻ đường thẳng PI vuông góc với BQ (I thuộc BQ), đường thẳng PI cắt OA tại H . Chứng minh H là trung điểm AO .

4. Tìm giá trị nhỏ nhất cả diện tích tam giác BPQ theo R khi hai đường kính AB và MN thay đổi.

Câu 5. (0, 5) điểm Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a}{b^2} + \frac{b}{c^2} + \frac{c}{a^2} + \frac{9}{2(a+b+c)}$

2. LỜI GIẢI

Câu 1.

1.

$$A = \sqrt{45} - \frac{8}{\sqrt{5}-1} + \sqrt{14-6\sqrt{5}}$$

$$A = 3\sqrt{5} - \frac{8(\sqrt{5}+1)}{4} + |3 - \sqrt{5}|$$

$$A = 3\sqrt{5} - 2\sqrt{5} - 2 + 3 - \sqrt{5}$$

$$A = 1$$

Vậy $A = 1$

2.

Với $a \geq 0, a \neq 4$ ta có:

$a,$

$$B = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+2} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-2} - \frac{4\sqrt{a}-1}{4-a} \right) : \frac{1}{\sqrt{a}+2}$$

$$B = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-2) - \sqrt{a}(\sqrt{a}+2) - 1 + 4\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}+2)} \cdot (\sqrt{a}+2)$$

$$B = -1\sqrt{a} - 2$$

Vậy $B = \frac{-1}{\sqrt{a}-2}$ với $a \geq 0, a \neq 4$

$b,$

Ta có: $B = \frac{-1}{\sqrt{a}-2}$ với $a \geq 0, a \neq 4$

Để B nhận giá trị dương thì $B > 0$

$$\Rightarrow \frac{-1}{\sqrt{a}-2} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{a}-2} < 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{a} - 2 < 0 \text{ (Do } 1 > 0)$$

$$\Leftrightarrow a < 4 \text{ mà } a \geq 0, a \neq 4$$

$$\Rightarrow 0 \leq a < 4 \text{ và } a \text{ nhận giá trị nguyên}$$

$$\Rightarrow a \in \{0; 1; 2; 3\}$$

Vậy $a \in \{0; 1; 2; 3\}$ để B nhận giá trị dương.

Câu 2.

1. $(\sqrt{x} - 1)^2 - \sqrt{x} - 5 = 0(1)$

Điều kiện xác định: $x \geq 0$

$$(1) \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} + 1 - \sqrt{x} - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 3\sqrt{x} - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 4) = 0$$

Do $x \geq 0$ nên $\sqrt{x} + 1 > 0$

$$\Rightarrow \sqrt{x} - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 16 \text{ (Thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 16$

2.

Gọi số học sinh hai lớp 9A, 9B lần lượt là x, y (học sinh), $(x, y \in \mathbb{N}^*, x, y < 75)$

Tổng số học sinh cả hai lớp là 75 em nên ta có $x + y = 75(1)$

Số sách giá khoa cũ lớp 9A quyên góp được là $2x$ (quyển)

Số sách giá khoa cũ lớp 9B quyên góp được là $3x$ (quyển)

Hai lớp quyên góp được 190 quyển nên ta có $2x + 3y = 190(2)$

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 75 \\ 2x + 3y = 190 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 159 \\ 2x + 3y = 190 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 35 \\ y = 40 \end{cases} \text{ ((Thỏa mãn))}$$

Vậy số học sinh lớp 9A là 35 học sinh và lớp 9B là 40 học sinh

Câu 3.

1.

Nếu $m^2 = 7$

$$\Leftrightarrow m = \sqrt{7} \text{ hoặc } m = -\sqrt{7}$$

Khi đó thì khi đó (Δ) không song song với (d)

Nếu $m^2 \neq 7$

Để (Δ) song song với (d) thì:

$$\begin{cases} m^2 - 7 = -3 \\ m^2 \neq 7 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 2 \\ m \neq \pm\sqrt{7} \\ m \neq 2 \end{cases} \Rightarrow m = -2$$

Vậy $m = -2$

2.

Phương trình $x^2 - 3(m - 1)x - 1 = 0$ (1) (với m là tham số)

Coi phương trình (1) là phương trình bậc hai ẩn x tham số m

$$\Delta = [3(m - 1)]^2 - 4 \cdot (-1) = 9(m - 1)^2 + 4$$

Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thì $\Delta > 0$

$$\Rightarrow 9(m - 1)^2 + 4 > 0 \text{ (Hiển nhiên đúng)}$$

$$\text{Theo định lý Viète ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 3(m - 1) \\ x_1 x_2 = -1 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } x_1^2 + 4x_2^2 = 3x_1 - 6x_2 - 4$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 - 4x_1 x_2 + 4x_2^2 = 3x_1 - 6x_2$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - 2x_2)^2 = 3(x_1 - 2x_2)$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - 2x_2)(x_1 - 2x_2 - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 - 2x_2 = 0 \text{ hoặc } x_1 - 2x_2 = 3$$

Nếu $x_1 - 2x_2 = 0$ khi đó ta có:

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ x_1 + x_2 = 3(m - 1) \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 2(m - 1) \\ x_2 = m - 1 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } x_1 x_2 = -1$$

$$\Rightarrow 2(m - 1)^2 = -1 \text{ (Vô lý do vế trái không âm, vế phải âm)}$$

Nếu $x_1 - 2x_2 = 3$ khi đó ta có:

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 + 3 \\ x_1 + x_2 = 3(m - 1) \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 2m - 1 \\ x_2 = m - 2 \end{cases}$$

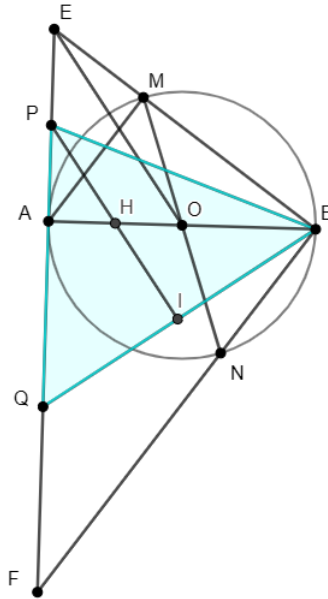
$$\text{Ta có: } x_1 x_2 = -1$$

$$\Rightarrow (2m - 1)(m - 2) = -1$$

$$\Leftrightarrow m = 1 \text{ hoặc } m = \frac{3}{2} \text{ (Thỏa mãn)}$$

$$\text{Vậy } m = 1 \text{ hoặc } m = \frac{3}{2} \text{ (Thỏa mãn)}$$

Câu 4.



1.

Ta có: $\widehat{AMB} = 90^\circ$ (Do AB là đường kính (O))

$$\Rightarrow AM \perp BE (1)$$

Ta có: $\widehat{MBN} = 90^\circ$ (Do MN là đường kính (O))

$$\Rightarrow BE \perp BF (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow AM \parallel BF$ (Định lý)

2.

Xét $\triangle EAB$ vuông tại A (giả thiết) có AM là đường cao (chứng minh trên)

$$\Rightarrow BM \cdot BE = BA^2 = 2R^2 \text{ (Hệ thức lượng trong tam giác vuông)}$$

Tương tự: $BN \cdot BF = 2R^2$

$$\Rightarrow BM \cdot BE = BN \cdot BF (= 2R^2)$$

$$\Rightarrow \frac{BM}{BN} = \frac{BF}{BE}$$

Xét $\triangle BMN$ và $\triangle BFE$ có:

$$\frac{BM}{BN} = \frac{BF}{BE}, \widehat{EBF} \text{ chung}$$

$$\Rightarrow \triangle BMN \triangle BFE \text{ (cgc)}$$

$$\Rightarrow \widehat{BMN} = \widehat{BFE}$$

$\Rightarrow MNEF$ nội tiếp. (dấu hiệu nhận biết)

3.

Xét $\triangle ABF$ có Q, O lần lượt là trung điểm AF, AB

$\Rightarrow QO$ là đường trung bình

$\Rightarrow QO // BF$ mà $BF \perp BE$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow QO \perp BE$

Xét $\triangle BQE$ có QO, BA là 2 đường cao, $O = QO \cap BA$

$\Rightarrow O$ là trực tâm

$\Rightarrow EO \perp BQ$ mà $PI \perp BQ$ (giả thiết)

$\Rightarrow PI // EO$

Xét $\triangle AOE$ có $PH // OE$ (chứng minh trên), P trung điểm AE (giả thiết)

$\Rightarrow H$ trung điểm AO

4.

Do P, Q trung điểm AE, AF nên:

$$S_{BPQ} = \frac{1}{2} AB \cdot PQ = \frac{1}{2} AB \cdot \frac{1}{2} EF = \frac{AB \cdot FE}{4}$$

Xét $\triangle BFE$ vuông tại B có đường cao BA

$$\Rightarrow AE \cdot AF = AB^2 = 4R^2 \text{ (Hệ thức lượng)}$$

Theo bất đẳng thức AM-GM có:

$$EF = AE + AF \geq 2\sqrt{AE \cdot AF} = 2 \cdot 2R = 4R$$

$$\Rightarrow S_{BPQ} \geq \frac{2R \cdot 4R}{4} = 2R^2$$

Dấu "=" xảy ra khi: A là trung điểm EF hay $\triangle BEF$ vuông cân tại B

Câu 5.

Ta có: $a + b + c = abc(a + b + c) = \frac{3abc(a+b+c)}{3} \leq \frac{(ab+bc+ac)^2}{3}$ (Áp dụng bất đẳng thức quen thuộc $(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + xz)$)

Áp dụng BĐT AM-GM ta được:

$$\frac{a}{b^2} + \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}, \frac{b}{c^2} + \frac{1}{b} \geq \frac{1}{c}, \frac{c}{a^2} + \frac{1}{c} \geq \frac{1}{a}$$

Cộng theo về các BĐT trên ta được:

$$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{c^2} + \frac{c}{a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = ab + bc + ac \text{ (Do } abc = 1)$$

$$\Rightarrow P \geq ab + bc + ac + \frac{27}{2(ab+bc+ac)^2} = \frac{ab+bc+ac}{2} + \frac{ab+bc+ac}{2} + \frac{27}{2(ab+bc+ac)^2} \geq 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi: $a = b = c = 1$

Vậy GTNN của P là $\frac{9}{2}$ khi $a = b = c = 1$