

ĐỀ BÀI

Câu 1: (6.0 điểm)

Cho biểu thức:

$$A = \frac{x^2 + 1}{x} + \frac{x^3 - 1}{x^2 - x} + \frac{x^4 - x^3 + x - 1}{x - x^3}$$

- Nêu ĐKXĐ và Rút gọn biểu thức A.
- Tính giá trị của biểu thức A biết x thỏa mãn: $x^2 + x = 2$.
- Tìm các giá trị $x > 0$ để biểu thức $B = \frac{6}{A}$ nhận giá trị nguyên.

Câu 2: (3.0 điểm)

- Cho n là số tự nhiên lẻ. Chứng minh: $n^3 - n$ chia hết cho 24.
- Tìm số nguyên dương n để $(n^2 - 8)^2 + 36$ là số nguyên tố.

Câu 3: (3.0 điểm)

- Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn: $2x^2 + 3y^2 + 4x = 19$
- Giải phương trình: $\frac{2x}{2x^2 - 5x + 3} + \frac{13x}{2x^2 + x + 3} = 6$.

Câu 4: (7.0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn. Các đường cao AE, BF cắt nhau tại H. Gọi M là trung điểm của BC , qua H vẽ đường thẳng a vuông góc với HM , a cắt AB, AC lần lượt tại I và K.

- Chứng minh: $\triangle ABC \sim \triangle EFC$
- Qua C kẻ đường thẳng b song song với đường thẳng IK , b cắt AH, AB theo thứ tự tại N và D. Chứng minh: $NC = ND$ và $HI = HK$.
- Gọi G là giao điểm của CH và AB. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{AH}{HE} + \frac{BH}{HF} + \frac{CH}{HG}$$

Câu 5: (1.0 điểm)

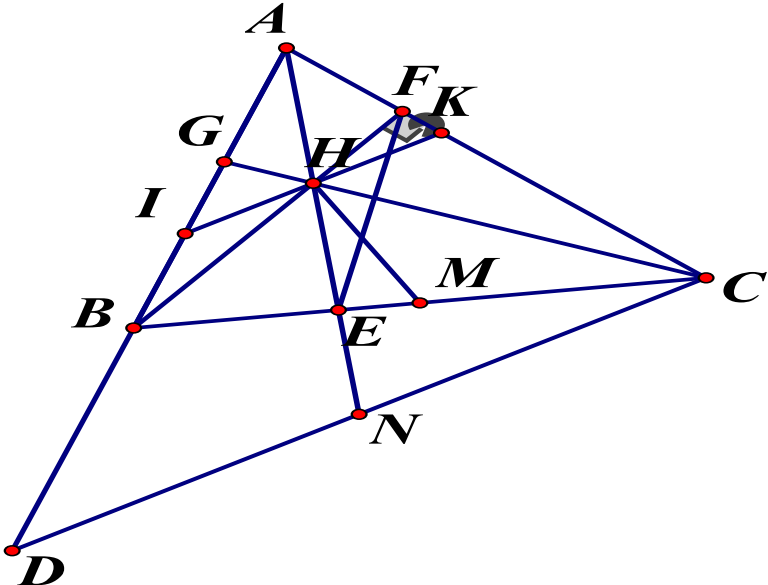
Cho hai số dương x, y thỏa mãn: $\frac{y^2}{4x^2 + 12x + 9} = \frac{2x + 4}{y + 1}$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $Q = xy - 3y - 2x - 3$.

-----Hết-----

(Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm)

Câu	Nội Dung	Điểm
Câu 1 (6.0 đ)	Cho biểu thức: $A = \frac{x^2 + 1}{x} + \frac{x^3 - 1}{x^2 - x} + \frac{x^4 - x^3 + x - 1}{x - x^3}$ a) Tìm ĐKXD và Rút gọn biểu thức A. b) Tính giá trị của biểu thức A biết x thỏa mãn: $x^2 + x = 2$. c) Tìm x > 0 để biểu thức $B = \frac{6}{A}$ nhận giá trị nguyên.	6.0đ
	a) ĐKXD: Với $x \neq 0; x \neq 1; x \neq -1$	0.5
	b) Rút gọn: Với $x \neq 0; x \neq 1; x \neq -1$ ta có:	
	$A = \frac{x^2 + 1}{x} + \frac{x^3 - 1}{x^2 - x} + \frac{x^4 - x^3 + x - 1}{x - x^3}$	0.5
	$= \frac{x^2 + 1}{x} + \frac{x^2 + x + 1}{x} - \frac{x^2 - x + 1}{x}$	0.5
	$= \frac{x^2 + 2x + 1}{x}$	0.5
	$= \frac{(x + 1)^2}{x}$	0.5
	b) Tính giá trị của biểu thức A biết x thỏa mãn: $x^2 + x = 2$ Ta có: $x^2 + x = 2$ $\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 2) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (kt/m)} \\ x = -2 \text{ (t/m)} \end{cases}$ Với $x = -2$ thì $A = \frac{-1}{2}$.	0.5 0.5 0.5
	c) Tìm x > 0 để biểu thức $B = \frac{6}{A}$ nhận giá trị nguyên	0.5
	Vì $x > 0$ nên $B = \frac{6}{A} = \frac{6x}{(x + 1)^2} > 0$ Vì $(x - 1)^2 > 0$ suy ra: $(x + 1)^2 > 4x$	0.5

	Do đó: $A = \frac{(x+1)^2}{x} > \frac{4x}{x} = 4 \Rightarrow A > 4 \Rightarrow \frac{6}{A} < \frac{6}{4} = 1,5$ Khi đó: $0 < B < 1,5$ mà B nhận giá trị nguyên nên $B = 1$ $\Leftrightarrow \frac{6x}{(x+1)^2} = 1 \Leftrightarrow 6x = (x+1)^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{3} \\ x = 2 - \sqrt{3} \end{cases}$ Vậy B nhận giá trị nguyên $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{3} \\ x = 2 - \sqrt{3} \end{cases}$ (t/mđk)	0.5
	1. Cho n là số tự nhiên lẻ. Chứng minh: $n^3 - n$ chia hết cho 24. 2. Tìm số nguyên dương n để $(n^2 - 8)^2 + 36$ là số nguyên tố.	3.0 đ
Câu 2 (3.0 đ)	1. Ta có: $n^3 - n = n(n-1)(n+1)$ Vì $n-1$; n; $n+1$ là ba số tự nhiên liên tiếp nên có một trong ba số đó chia hết cho 3. Do đó $(n^3 - n):3$ (1) Vì n là số tự nhiên lẻ nên $n-1$ và $n+1$ là hai số tự nhiên chẵn liên tiếp. Do đó $(n-1)(n+1):8 \Rightarrow (n^3 - n):8$ (2) Vì 3 và 8 là hai số nguyên tố cùng nhau nên kết hợp với (1), (2) suy ra $(n^3 - n):24$ (đpcm)	0.5
	2. Ta có $(n^2 - 8)^2 + 36 = n^4 - 16n^2 + 64 + 36 = n^4 - 16n^2 + 100 = n^4 + 20n^2 + 100 - 36n^2$ $= (n^2 + 10)^2 - 36n^2 = (n^2 - 6n + 10)(n^2 + 6n + 10)$ Vì $n \in \mathbb{N}^*$ nên $n^2 + 6n + 10 > n^2 - 6n + 10$ để $(n^2 - 8)^2 + 36$ là số nguyên tố thì $\begin{cases} n^2 + 6n + 10 = 1 \\ n^2 - 6n + 10 = 1 \end{cases}$ Mà $n^2 + 6n + 10 > n^2 - 6n + 10$ nên $n^2 - 6n + 10 = 1$ $\Leftrightarrow n^2 - 6n + 9 = 0 \Leftrightarrow (n-3)^2 = 0 \Leftrightarrow n = 3$ Thử lại: Với $n = 3 \Rightarrow (n^2 - 8)^2 + 36 = (3^2 - 8)^2 + 36 = 37$ là số nguyên tố Vậy với $n = 3$ thì $(n^2 - 8)^2 + 36$ là số nguyên tố	0.5
		0.5
		0.5
Câu 3 (3.0 đ)	1. Tìm các cặp số nguyên (x; y) thỏa mãn: $2x^2 + 3y^2 + 4x = 19$ 2. Giải phương trình: $\frac{2x}{2x^2 - 5x + 3} + \frac{13x}{2x^2 + x + 3} = 6$	3.0 đ

	Cho tam giác ABC nhọn . Các đường cao AE, BF cắt nhau tại H. Gọi M là trung điểm của BC, qua H vẽ đường thẳng a vuông góc với HM, a cắt AB, AC lần lượt tại I và K. a) Chứng minh: $\Delta ABC \sim \Delta EFC$ b) Qua C kẻ đường thẳng b song song với đường thẳng IK, b cắt AH, AB theo thứ tự tại N và D. Chứng minh: H là trung điểm của IK c) Gọi G là giao điểm của CH và AB. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{AH}{HE} + \frac{BH}{HF} + \frac{CH}{HG}$	
Câu 4 (7.0 đ)	Hình vẽ: 	0,5
	a) Ta có: $\Delta AEC \sim \Delta BFC (g.g) \Rightarrow \frac{CE}{CF} = \frac{CA}{CB}$ Xét ΔABC và ΔEFC có: $\frac{CE}{CF} = \frac{CA}{CB}$ và góc C chung Suy ra: $\Delta ABC \sim \Delta EFC (cgc)$	1,0 1,0 0.5
	b) Vì $CN \parallel IK$ mà $HM \perp IK$ nên $HM \perp CN \Rightarrow M$ là trực tâm ΔHNC $\Rightarrow MN \perp CH$ mà $CH \perp AD$ (H là trực tâm ΔABC) $\Rightarrow MN \parallel AD$ hay $MN \parallel BD$ Xét ΔDBC có: M là trung điểm của BC, $MN \parallel BD$ $\Rightarrow N$ là trung điểm của $CD \Rightarrow NC = ND$ (1) Vì $IK \parallel CD$, Áp dụng định lý talets ta có: $\frac{AH}{AN} = \frac{IH}{DN} = \frac{HK}{CN}$ (2) Từ (1) và (2) $\Rightarrow IH = HK$ hay H là trung điểm của IK	0.5 0.5 0.5 0.5

	c)Ta có: $\frac{AH}{HE} = \frac{S_{AHC}}{S_{CHE}} = \frac{S_{ABH}}{S_{BHE}} = \frac{S_{AHC}+S_{ABH}}{S_{CHE}+S_{BHE}} = \frac{S_{AHC}+S_{ABH}}{S_{BHC}}$ Tương tự ta có: $\frac{BH}{BF} = \frac{S_{BHC}+S_{BHA}}{S_{AHC}}; \frac{CH}{CG} = \frac{S_{BHC}+S_{AHC}}{S_{BHA}}$ $\Rightarrow P = \frac{AH}{HE} + \frac{BH}{BF} + \frac{CH}{CG} = \frac{S_{AHC} + S_{ABH}}{S_{BHC}} + \frac{S_{BHC} + S_{BHA}}{S_{AHC}} + \frac{S_{BHC} + S_{AHC}}{S_{BHA}}$ $= \frac{S_{AHC}}{S_{BHC}} + \frac{S_{ABH}}{S_{BHC}} + \frac{S_{BHC}}{S_{AHC}} + \frac{S_{BHA}}{S_{AHC}} + \frac{S_{BHC}}{S_{BHA}} + \frac{S_{AHC}}{S_{BHA}}$ $= \frac{S_{AHC}}{S_{BHC}} + \frac{S_{BHC}}{S_{AHC}} + \frac{S_{ABH}}{S_{BHC}} + \frac{S_{BHC}}{S_{BHA}} + \frac{S_{BHA}}{S_{AHC}} + \frac{S_{AHC}}{S_{BHA}}$ $\geq 2 + 2 + 2 = 6$ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $S_{AHC} = S_{ABH} = S_{BHC}$ Khi và chỉ khi $\triangle ABC$ đều .	0.5 0.5 0.5 0.5
	Cho hai số dương x, y thỏa mãn: $\frac{y^2}{4x^2 + 12x + 9} = \frac{2x+4}{y+1}$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $Q = xy - 3y - 2x - 3$.	1.0 đ
Câu 5 (1.0 đ)	Ta có: $\frac{y^2}{4x^2 + 12x + 9} = \frac{2x+4}{y+1} \Rightarrow \frac{y^2}{(2x+3)^2} = \frac{2x+4}{y+1}$ Đặt $a = y; b = 2x+3$ ($a > 0; b > 3$) Ta được: $\frac{a^2}{b^2} = \frac{b+1}{a+1} \Rightarrow a^3 + a = b^3 + b \Leftrightarrow (a-b)(a^2 + ab + b^2 + a + b) = 0$ (1) Vì $a > 0; b > 3$ nên $a^2 + ab + b^2 + a + b > 0$. Do đó : (1) $\Leftrightarrow a = b$. Suy ra: $y = 2x + 3$. Nên : $Q = x(2x+3) - 3(2x+3) - 2x - 3$ $= 2x^2 - 5x - 12 = 2\left(x^2 - \frac{5}{2}x - 6\right) = 2\left[\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{121}{16}\right].$ $= 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{121}{8} \geq -\frac{121}{8}.$ Dấu "=" xảy ra khi: $x = \frac{5}{4}; y = \frac{11}{2}$ (thỏa mãn). Vậy GTNN của Q là $-\frac{121}{8}$ tại $x = \frac{5}{4}; y = \frac{11}{2}$.	0.5 0.5
	Điểm toàn bài	20 đ

Lưu ý khi chấm bài:

- Điểm toàn bài làm tròn đến 0,25 điểm.

- Trên đây chỉ là sơ lược các bước giải, lời giải của thí sinh cần lập luận chặt chẽ, hợp logic. Nếu thí sinh trình bày cách làm khác mà đúng thì cho điểm các phần theo thang điểm tương ứng.