

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn: Toán

(Thời gian 150 phút không kể thời gian giao đề)

(Đề có 03 trang)

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM. (8,0 điểm)

Hãy chọn phương án trả lời đúng rồi ghi vào tờ giấy thi.

Câu 1: Biểu thức $\frac{1}{2-\sqrt{3}} = a + b\sqrt{3}$. Giá trị $a^2 + b^2$ là :

- A. 1 B. 3 C. 5 D. 7

Câu 2. Rút gọn biểu thức $A = \left[\frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} + \frac{3\sqrt{x}}{y-x} \right] : \frac{2-y}{x-y}$ (với $x, y > 0, x \neq y$)

được kết quả là:

- A. $\frac{\sqrt{x}}{2-y}$ B. $\frac{\sqrt{y}}{y-2}$ C. $\frac{\sqrt{y}}{2-y}$ D. $\frac{3\sqrt{x}}{y-2}$

Câu 3: Giá trị nhỏ nhất của $Q = \frac{x+6\sqrt{x}+34}{\sqrt{x}+3}$ là

- A. $\frac{34}{3}$. B. 10. C. 8. D. 4.

Câu 4: Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{4x^2 - 20x + 25} + 2x = 5$ là:

- A. $S = \{x / x \leq 2,5\}$ B. $S = \{2,5\}$ C. $S = \{x / x > 2,5\}$ D. $S = \Phi$

Câu 5. Cho $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = 1$ (với $x, y > 0$). Giá trị của biểu thức $x+y$ là

- A. 1. B. $\sqrt{2}$. C. 2. D. $2\sqrt{2}$.

Câu 6. Cho $f(x) = (x^3 + 6x - 7)^{2017}$. Biết $a = \sqrt[3]{3+\sqrt{17}} + \sqrt[3]{3-\sqrt{17}}$ thì giá trị của $f(a)$ là:

- A. 1 B. 0 C. 3 D. -1

Câu 7: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2 + \sqrt{2x^2 - 4x + 5}$ là

- A. $2 - \sqrt{3}$ B. $1 + \sqrt{3}$ C. $3 - \sqrt{3}$ D. $2 + \sqrt{3}$

Câu 8. Biểu thức $\frac{\sqrt{5-3x}}{\sqrt{6-x^2-x}}$ có nghĩa khi nào?

- A. $-3 \leq x \leq 2$. B. $\frac{5}{3} < x < 2$. C. $x < -3$ hoặc $x > 2$. D. $-3 < x \leq \frac{5}{3}$.

Câu 9. Cho tam giác ABC cân tại A, đường cao AH và BK. Ta có

- A. $\frac{1}{BK^2} = \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{AH^2}$ B. $\frac{1}{BK^2} = \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{2AH^2}$
C. $\frac{1}{BK^2} = \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{4AH^2}$ C. $\frac{1}{BK^2} = \frac{1}{3BC^2} + \frac{1}{AH^2}$

Câu 10. Cho hình thang ABCD ($AB // CD$), có hai đường chéo vuông góc với nhau.

Biết $BD = 12cm, AB + CD = 16cm$. Diện tích của hình thang ABCD là

- A. $6\sqrt{7}cm^2$. B. $12\sqrt{7}cm^2$. C. $24\sqrt{7}cm^2$. D. $48\sqrt{7}cm^2$.

Câu 11. Cho tam giác ABC vuông tại A, phân giác AD ($D \in BC$), có $AB = 10cm, AC = 15cm$. Qua D kẻ đường thẳng song song với AB cắt AC tại E. Độ dài đoạn CE là

A. 10cm

B. 12cm

C. 15cm

D. 9cm

Câu 12. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Giả sử $AB = 6\text{cm}$, $BH = 4\text{cm}$.

Khi đó cạnh BC bằng:

A. 9cm

B. 10cm

C. 10,5cm

D. $8\sqrt{2}\text{cm}$

Câu 13. Cho tam giác ABC vuông tại A đường cao AH. Kẻ HE vuông góc với AB tại E, kẻ HF vuông góc với AC tại F. Khi đó hệ thức đúng là:

A. $\frac{AB^3}{AC^3} = \frac{CF}{BE}$

B. $\frac{AB^3}{AC^3} = \frac{BE}{CF}$

C. $\frac{AH^3}{HE \cdot BC \cdot HF} = 1$

D. $\frac{AH^3}{HE \cdot AC \cdot HF} = 1$

Câu 14: Cho tam giác ABC có $AB = 4\text{cm}$, $AC = 6\text{cm}$, đường phân giác AD. Gọi O chia trong AD theo tỉ số $AO:OD = 2:1$. Gọi K là giao điểm của BO và AC. Tỉ số $AK:KC$ là

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{2}{3}$.

C. $\frac{3}{4}$.

D. $\frac{4}{5}$.

Câu 15. Hình thang cân ABCD có đáy lớn $CD = 10\text{cm}$, đáy nhỏ bằng đường cao, đường chéo vuông góc với cạnh bên. Độ dài đường cao của hình thang là:

A. $5\sqrt{2}\text{cm}$

B. $\sqrt{5}\text{cm}$

C. $2\sqrt{5}\text{cm}$

D. $3\sqrt{5}\text{cm}$

Câu 16. Nam chôn một cây cọc xuống đất để đo chiều cao của một cái cây trước nhà, cọc cao 2m và đặt cách cây một khoảng 15m. Từ chỗ cái cọc Nam lùi ra xa cách cọc 0,8m thì nhìn thấy đầu cọc và đỉnh cây nằm trên một đường thẳng. Biết khoảng cách từ chân đến mắt của Nam là 1,6m. Chiều cao của cái cây đó là

A. 10,85 m

B. 10,25 m

C. 9,5 m

D. 9,25 m

II. PHẦN TỰ LUẬN. (12,0 điểm)

Bài 1. (3,0 điểm)

a) Chứng minh với mọi số nguyên n thì $A = n(n+1)(2n+1):6$.

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $6x^2 - 3xy + 17x - 4y + 5 = 0$.

Bài 2. (4,0 điểm)

a) Cho ba số a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 2020$. Tính giá trị của biểu thức:

$$A = \frac{a^2 - bc}{a^2 + 2020} + \frac{b^2 - ca}{b^2 + 2020} + \frac{c^2 - ab}{c^2 + 2020}.$$

b) Giải phương trình $\sqrt{5x+11} - \sqrt{6-x} + 5x^2 - 14x - 60 = 0$.

Bài 3. (4,0 điểm)

1. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu vuông góc của H lên AB, AC.

a) Chứng minh: $AD \cdot AB = AE \cdot AC$.

b) Chứng minh: $DE^3 = BC \cdot BD \cdot CE$.

2. Cho hình vuông ABCD, M là một điểm tùy ý trên đường chéo BD. Kẻ $ME \perp AB$ và $MF \perp AD$ ($E \in AB$, $F \in AD$).

a) Chứng minh $DE \perp CF$ và ba đường thẳng DE, BF, CM đồng quy.

b) Xác định vị trí của điểm M để diện tích tứ giác AEMF lớn nhất.

Bài 4. (1,0 điểm) Cho x, y, z là ba số dương thỏa mãn $x + y + z = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{x + \sqrt{3x + yz}} + \frac{y}{y + \sqrt{3y + zx}} + \frac{z}{z + \sqrt{3z + xy}} \leq 1.$$

-----HẾT-----

Họ và tên thí sinh:..... Số báo danh:.....

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm./.

HƯỚNG DẪN CHẤM
THI HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP HUYỆN

(Hướng dẫn chấm có 04 trang)

Lưu ý: Nếu học sinh làm cách khác, tổ chấm thống nhất cho điểm. Học sinh không vẽ hình hoặc vẽ sai không tính điểm.

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM (8,0 điểm). Mỗi câu trả lời đúng được 0,5 điểm

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8
	C	B	B	A	B	D	D	D
Câu	9	10	11	12	13	14	15	16
	C	C	D	A	B	D	C	C

II. PHẦN TỰ LUẬN (12,0 điểm).

Bài 1. (3,0 điểm)

a) Chứng minh với mọi số nguyên n thì $A = n(n+1)(2n+1):6$.

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $6x^2 - 3xy + 17x - 4y + 5 = 0$.

Nội dung cần đạt	Điểm
$A = n(n+1)(2n+1) = n(n+1)(2n-2+3)$ $= (n-1)n(n+1) + 3n(n+1)$	0,5
$\left. \begin{array}{l} (n-1)n(n+1):6 \\ 3n(n+1):6 \end{array} \right\} \Rightarrow A:6$	0,5 0,5
$6x^2 - 3xy + 17x - 4y + 5 = 0$ b) $\Leftrightarrow 6x^2 + 8x - 3xy - 4y + 9x + 12 = 7$ $\Leftrightarrow 2x(3x+4) - y(3x+4) + 3(3x+4) = 7$ $\Leftrightarrow (3x+4)(2x-y+3) = 7$ Lập bảng: Ta có nghiệm $(x, y) \in \{(-1; -6), (1; 4)\}$	0,5 0,5 0,5

Bài 2. (4,0 điểm)

a) Cho ba số a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca=2020$. Tính giá trị của biểu thức:

$$A = \frac{a^2 - bc}{a^2 + 2020} + \frac{b^2 - ca}{b^2 + 2020} + \frac{c^2 - ab}{c^2 + 2020}.$$

b) Giải phương trình $\sqrt{5x+11} - \sqrt{6-x} + 5x^2 - 14x - 60 = 0$.

Nội dung cần đạt	Điểm
a) Từ $ab+bc+ca=2020$ suy ra $a^2 + 2020 = a^2 + ab+bc+ca = (a+b)(a+c)$ Tương tự có $b^2 + 2020 = (b+c)(b+a)$, $c^2 + 2020 = (c+a)(c+b)$. $\Rightarrow A = \frac{a^2 - bc}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^2 - ca}{(b+c)(b+a)} + \frac{c^2 - ab}{(c+a)(c+b)}$ $= \frac{(a^2 - bc)(b+c) + (b^2 - ca)(c+a) + (c^2 - ab)(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$ Khai triển và làm gọn biểu thức trên tử ta được kết quả là 0. Vậy $A=0$.	0,5 0,5 0,5 0,5

b) ĐK: $-\frac{11}{5} \leq x \leq 6$. Ta có: $\sqrt{5x+11} - \sqrt{6-x} + 5x^2 - 14x - 60 = 0$	0,25
$\Leftrightarrow (\sqrt{5x+11} - 6) - (\sqrt{6-x} - 1) + (x-5)(5x+11) = 0$	
$\Leftrightarrow \frac{5(x-5)}{\sqrt{5x+11}+6} + \frac{x-5}{\sqrt{6-x}+1} + (x-5)(5x+11) = 0$	0,5
$\Leftrightarrow (x-5) \left(\frac{5}{\sqrt{5x+11}+6} + \frac{1}{\sqrt{6-x}+1} + 5x+11 \right) = 0 \Leftrightarrow x = 5$.	0,5
(Do $\frac{5}{\sqrt{5x+11}+6} + \frac{1}{\sqrt{6-x}+1} + 5x+11 > 0$ với $-\frac{11}{5} \leq x \leq 6$).	0,5
Vậy Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 5$.	0,25

Bài 3. (4,0 điểm)

1. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi D, E lần lượt là hình chiếu vuông góc của H lên AB, AC.

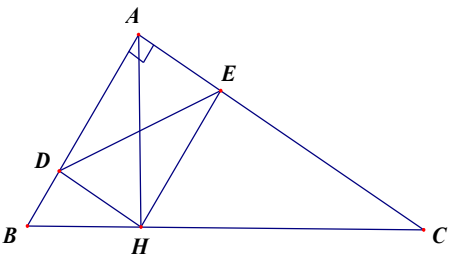
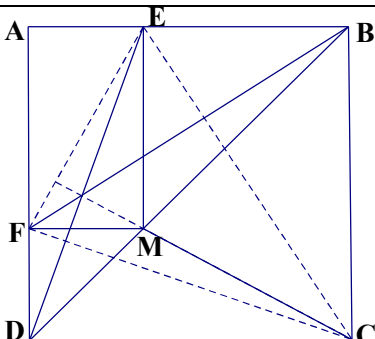
a) Chứng minh: $AD \cdot AB = AE \cdot AC$

c) Chứng minh: $DE^3 = BC \cdot BD \cdot CE$

2. Cho hình vuông ABCD, M là một điểm tùy ý trên đường chéo BD. Kẻ $ME \perp AB$, $MF \perp AD$.

a) Chứng minh ba đường thẳng: DE, BF, CM đồng quy.

b) Xác định vị trí của điểm M để diện tích tứ giác AEMF lớn nhất.

Nội dung cần đạt	Điểm
1. Hình vẽ :	
	
a) Ta có: $AD \cdot AB = AE \cdot AC (=AH^2)$	1,0
b) $BH^2 = BD \cdot AB$, $CH^2 = CE \cdot AC$ $\Rightarrow AH^4 = BH^2 \cdot CH^2 = AB \cdot AC \cdot BD \cdot CE = AH \cdot BC \cdot BD \cdot CE$ $\Rightarrow AH^3 = BC \cdot BD \cdot CE$ Chứng minh tứ giác ADHE là hình chữ nhật $\Rightarrow DE = AH$ $\Rightarrow DE^3 = BC \cdot BD \cdot CE$	0,25 0,25 0,25 0,25
2. Hình vẽ	
	

a) Chứng minh $AE = AF$ Chứng minh $\triangle AED = \triangle DFC$ DE, BF, CM là ba đường cao của $\triangle EFC \Rightarrow đpcm$	0,5 0,5
b) Đặt $a = AB$ $\Rightarrow ME + MF = a$ không đổi $\Rightarrow S_{AEMF} = ME.MF \leq \frac{(ME + MF)^2}{4} = \frac{a^2}{4}$ (không đổi) $\Rightarrow S_{AEMF}$ lớn nhất $\Leftrightarrow ME = MF$ (tứ giác $AEMF$ là hình vuông) $\Rightarrow M$ là trung điểm của BD .	0,5 0,5

Bài 4. (1,0 điểm) Cho x, y, z là ba số dương thỏa mãn $x + y + z = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{x + \sqrt{3x + yz}} + \frac{y}{y + \sqrt{3y + zx}} + \frac{z}{z + \sqrt{3z + xy}} \leq 1$$

Nội dung cần đạt	Điểm
Từ $(x - \sqrt{yz})^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + yz \geq 2x\sqrt{yz}$ (*) Dấu “=” $\Leftrightarrow x^2 = yz$ Chỉ ra : $3x + yz = (x + y + z)x + yz = x^2 + yz + x(y + z) \geq 2x\sqrt{yz} + x(y + z)$ Suy ra : $\sqrt{3x + yz} \geq \sqrt{2x\sqrt{yz} + x(y + z)} = \sqrt{x}(\sqrt{y} + \sqrt{z})$ (Áp dụng (*)) $x + \sqrt{3x + yz} \geq \sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}) \Rightarrow \frac{x}{x + \sqrt{3x + yz}} \leq \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})}$ (1) Tương tự : $\frac{y}{y + \sqrt{3y + xz}} \leq \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}}$ (2); $\frac{z}{z + \sqrt{3z + xy}} \leq \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}}$ (3) Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow \frac{x}{x + \sqrt{3x + yz}} + \frac{y}{y + \sqrt{3y + xz}} + \frac{z}{z + \sqrt{3z + xy}} \leq 1$ Dấu “=” xảy ra khi $x = y = z = 1$	1,0

-----HẾT-----