PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TP BUÔN MA THUỘT

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THCS
CẤP THÀNH PHỐ NĂM HỌC 2019-2020
MÔN: TOÁN
Thời gian: 150 phút *(không tính giao đề)*
Ngày thi: 09/01/2020

Bài 1: *(3,0 điểm)*

Cho biểu thức $M=\frac{2}{3}\cdot\left[\frac{1}{1+\left(\frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{3}}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{3}}\right)^2}\right]\cdot\frac{2020}{x+1}$.

a) Rút gọn M.

b) Tìm giá trị lớn nhất của M.

Bài 2: *(5,0 điểm)*

a) Chứng minh rằng đa thức $P(x)=x^5-3x^4+6x^3-3x^2+9x-6$ không thể có nghiệm là số nguyên.

b) Đa thức $P(x)$ chia cho $(x-1)$ được số dư bằng 4, chia cho $(x-3)$ được số dư bằng 14. Tìm số dư của phép chia $P(x)$ cho $(x-1)(x-3)$.

c) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình sau: $5(x+y+z+t)+10=2xyzt$.

d) Cho a,b là hai số thực không âm thỏa mãn $a^2+b^2\le 2$, hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M=a\sqrt{3b(a+2b)}+b\sqrt{3a(b+2a)}$.

Bài 3: *(4,0 điểm)*

Cho hàm số $y=(m+2)x+m-1$

a) Tìm điều kiện của m để hàm số nghịch biến trên tập số thực.

b) Tìm điều kiện của m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 3.

c) Tìm m để đồ thị của các hàm số $y=-x+2; y=2x-1$ và $y=(m-2)x+m-1$ đồng quy.

d) Tìm m để đồ thị hàm số tạo với trục tung và trục hoành một tam giác có diện tích bằng 2.

Bài 4: *(2,0 điểm)*

Cho hình vuông ABCD có cạnh a. Điểm M di động trên đường chéo AC. Kẻ ME $\perp$ AB, MF $\perp$ BC (E $\in$ AB, F $\in$ BC). Xác định vị trí của điểm M để diện tích tam giác DEF đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 5: *(6,0 điểm)*

Cho hai đường đường tròn $(O;R)$ và $(O';r)$ tiếp xúc ngoài tại B. Tiếp tuyến chung ngoài AD cắt đường nối tâm tại M, $(A\in(O), D\in(O'))$. Tiếp tuyến chung tại B cắt AD tại P. Gọi H là hình chiếu của A lên BC, E là giao điểm của PC và AH, C là điểm đối xứng với B qua O.

a) Chứng minh $EH=EA$;

b) Tính AH theo R và $OP=d$;

c) Tính AD theo R và r;

d) Giả sử $AD=DM=4cm$, tính R và r;

e) Gọi $(O_1;R_1)$ tiếp xúc với AD đồng thời tiếp xúc ngoài với $(O;R)$ và $(O';r)$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{\sqrt{R_1}}=\frac{1}{\sqrt{R}}+\frac{1}{\sqrt{r}}$.

--------------- Hết ---------------

BÀI GIẢI SƠ LƯỢC

Bài 1: *(3,0 điểm)*

a) Rút gọn M $(x \ge 0)$

$$M = \frac{2}{3}\cdot\left[\frac{1}{1+\left(\frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{3}}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{3}}\right)^2}\right]\cdot\frac{2020}{x+1} = \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{4x+4\sqrt{x}+4}+\frac{3}{4x-4\sqrt{x}+4}\right)\cdot\frac{2020}{x+1}$$

$$= \frac{1010}{x+1}\cdot\left(\frac{1}{x+\sqrt{x}+1}+\frac{1}{x-\sqrt{x}+1}\right) = \frac{1010}{x+1}\cdot\frac{2(x+1)}{\left(x+\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)} = \frac{2020}{(x+1)^2-x} = \frac{2020}{x^2+x+1}$$

b) Tìm giá trị lớn nhất của M.

Vì $x \ge 0 \Rightarrow x^2+x+1 \ge 1 \Rightarrow M = \dfrac{2020}{x^2+x+1} \le 2020$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 0$ (TMĐK).

Vậy $MaxM = 2020$ khi $x = 0$

Bài 2: *(5,0 điểm)*

a) Giả sử $x = a\ (a \in Z)$ là nghiệm nguyên của $P(x)$ $\Rightarrow P(a) = a^5 - 3a^4 + 6a^3 - 3a^2 + 9a - 6 = 0$

+) Nếu $a \vdots 3$ thì $\left(a^5 - 3a^4 + 6a^3 - 3a^2 + 9a\right) \vdots 9; 6 \not\vdots 9 \Rightarrow P(a) \not\vdots 9$ (mâu thuẫn, vì $P(a) = 0 \vdots 9$)

+) Nếu $a \not\vdots 3$ thì $\left(-3a^4 + 6a^3 - 3a^2 + 9a - 6\right) \vdots 3; a^5 \not\vdots 3 \Rightarrow P(a) \not\vdots 3$ (mâu thuẫn, vì $P(a) = 0 \vdots 3$)

Vậy $P(x)$ không thể có nghiệm là số nguyên.

b) Vì $P(x)$ chia cho $(x-1)$ được số dư bằng 4, nên $P(x) = (x-1)\cdot E(x) + 4 \Rightarrow P(1) = 4$

Vì $P(x)$ chia cho $(x-3)$ được số dư bằng 14, nên $P(x) = (x-3)\cdot F(x) + 14 \Rightarrow P(3) = 14$

Giả sử $P(x) = (x-1)(x-3)\cdot Q(x) + ax + b \Rightarrow \begin{cases} P(1) = a+b \\ P(3) = 3a+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = 4 \\ 3a+b = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = -1 \end{cases}$

Vậy dư trong phép chia $P(x)$ cho $(x-1)(x-3)$ là $5x-1$.

c) Không mất tính tổng quát, giả sử $x \ge y \ge z \ge t \ge 1$

Ta có $2xyzt = 5(x+y+z+t) + 10 \le 5\cdot 4x + 10 = 20x + 10$

$\Leftrightarrow xyzt \le 10x + 5 \le 10x + 5x = 15x$ (vì $1 \le x \Rightarrow 5 \le 5x$) $\Leftrightarrow yzt \le 15$

Mà $yzt \ge ttt = t^3$. Do đó $t^3 \le 15 \Leftrightarrow t \le 2 \Rightarrow t \in \{1; 2\}$

TH 1: $t = 1$; ta có $yz \le 15$, mà $yz \ge zz = z^2 \Rightarrow z^2 \le 15 \Rightarrow z \le 3 \Rightarrow z \in \{1; 2; 3\}$

+) Với $z = 1$, ta có: $5(x+y+2) + 10 = 2xy \Leftrightarrow (2x-5)(2y-5) = 65$.

Do $2x-5 \ge 2y-5$; $65 = 65\cdot 1 = 13\cdot 5$. Nên ta có:

$\begin{cases} 2x-5 = 65 \\ 2y-5 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 35 \\ y = 3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} 2x-5 = 13 \\ 2y-5 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 5 \end{cases}$

+) Với $z = 2$, ta có: $5(x+y+3) + 10 = 4xy \Leftrightarrow (4x-5)(4y-5) = 125$.

Do $2x-5 \ge 2y-5$; $125 = 125\cdot 1 = 25\cdot 5$. Nên ta có:

$\begin{cases} 4x-5 = 125 \\ 4y-5 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{65}{2} \notin Z \\ y = \dfrac{3}{2} \notin Z \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} 4x-5 = 25 \\ 4y-5 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{15}{2} \notin Z \\ y = \dfrac{5}{2} \notin Z \end{cases}$

+) Với $z = 3$, ta có: $5(x+y+4) + 10 = 6xy \Leftrightarrow (6x-5)(6y-5) = 205$.

Do $2x-5 \ge 2y-5$; $205 = 205\cdot 1 = 41\cdot 5$. Nên ta có:

$\begin{cases} 6x-5=205 \\ 6y-5=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=35 \\ y=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} 6x-5=41 \\ 6y-5=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{23}{3} \notin Z \\ y=\dfrac{5}{3} \notin Z \end{cases}$

TH 2: $t=2$; ta có $2yz \le 15 \Leftrightarrow yz \le 7$, mà $yz \ge zz = z^2 \Rightarrow z^2 \le 7 \Rightarrow z \le 2 \Rightarrow z \in \{1; 2\}$

Mà $z \ge t = 2 \Rightarrow z = 2$, do đó $yz \le 7 \Leftrightarrow 2y \le 7 \Leftrightarrow y \le 3$. Lại có $y \ge z = 2 \Rightarrow y \in \{2; 3\}$

+) Với $y=2$, ta có: $5(x+6)+10=16x \Leftrightarrow x=\dfrac{40}{11} \notin Z$.

+) Với $y=3$, ta có: $5(x+7)+10=24x \Leftrightarrow x=\dfrac{45}{19} \notin Z$.

Vậy phương trình có nghiệm $(x; y; z; t) = (35; 3; 1; 1); (9; 5; 1; 1)$ và các hoán vị của nó (24 nghiệm).

d) Áp dụng bất đẳng thức: $\sqrt{AB} \le \dfrac{A+B}{2} \left(A \ge 0, B \ge 0\right)$.

Ta có: $M = a\sqrt{3b(a+2b)} + b\sqrt{3a(b+2a)} = \sqrt{3ab\left(a^2+2ab\right)} + \sqrt{3ab\left(b^2+2ab\right)}$

$\le \dfrac{3ab+\left(a^2+2ab\right)}{2} + \dfrac{3ab+\left(b^2+2ab\right)}{2} = \dfrac{\left(a^2+b^2\right)+10ab}{2} \le \dfrac{2+10ab}{2} = 1+5ab$ (vì $a^2+b^2 \le 2$)

Mặt khác $2 \ge a^2+b^2 \ge 2ab \Leftrightarrow 1 \ge ab$. Nên $M \le 1+5ab \le 1+5 = 6$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ a^2+b^2=2 \\ 3ab=a^2+2ab \\ 3ab=b^2+2ab \end{cases} \Leftrightarrow a=b=1$. Vậy $MaxM = 6$ khi $a=b=1$

__Bài 3__: *(4,0 điểm)*

a) Hàm số nghịch biến $\Leftrightarrow m+2<0 \Leftrightarrow m<-2$

b) Đồ thị hàm số $y=(m+2)x+m-1$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 3

$\Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số $y=(m+2)x+m-1$ đi qua điểm $(3; 0) \Leftrightarrow 0=3(m+2)+m-1 \Leftrightarrow m=-\dfrac{5}{4}$

c) Tọa độ giao điểm của hai đường thẳng $y=-x+2; y=2x-1$ là nghiệm của hệ

$\begin{cases} y=-x+2 \\ y=2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=3 \\ y=-x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

Do đó đồ thị của các hàm số $y=-x+2; y=2x-1$ và $y=(m-2)x+m-1$ đồng quy

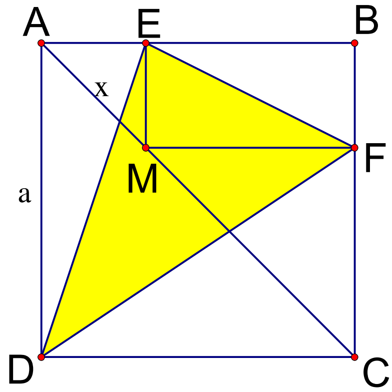
$\Leftrightarrow$ đường thẳng $y=(m-2)x+m-1$ đi qua điểm $(1; 1) \Leftrightarrow 1=m-2+m-1 \Leftrightarrow 2m=4 \Leftrightarrow m=2$

d) Điều kiện để đường thẳng $y=(m+2)x+m-1$ tạo với trục tung và trục hoành một tam giác là $\begin{cases} m+2 \ne 0 \\ m-1 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ne -2 \\ m \ne 1 \end{cases}$. Đường thẳng $y=(m+2)x+m-1$ cắt trục hoành tại $A\left(\dfrac{1-m}{m+2}; 0\right)$ và cắt trục tung tại điểm $B(0; m-1)$.

$S_{OAB}=2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}OA \cdot OB = 2 \Leftrightarrow \left|\dfrac{1-m}{m+2}\right| \cdot |m-1| = 4 \Leftrightarrow (m-1)^2 = 4|m+2| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (m-1)^2 = 4(m+2) \\ (m-1)^2 = -4(m+2) \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2-6m-7=0 \\ m^2+2m+9=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (m+1)(m-7)=0 \\ (m+1)^2+8=0\ (VN) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=7 \end{array}\right.$ (TMĐK)

Bài 4: *(2,0 điểm)*



Vì ABCD là hình vuông cạnh $a \Rightarrow AC = a\sqrt{2}$, đặt $AM = x\left(0 < x < a\sqrt{2}\right)$

ΔAEM vuông cân tại E $\Rightarrow AE = ME = \frac{AM}{\sqrt{2}} = \frac{x}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow BE = AB - AE = a - \frac{x}{\sqrt{2}}$

Tứ giác BEMF là hình chữ nhật

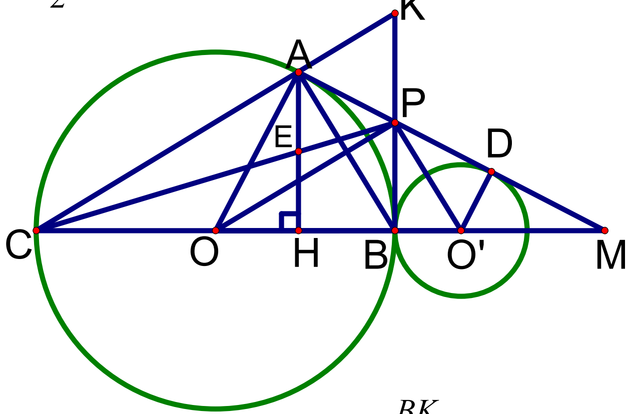
$\Rightarrow BF = ME = \frac{x}{\sqrt{2}} \Rightarrow CF = BC - BF = a - \frac{x}{\sqrt{2}}$

Do đó $S_{DEF} = S_{ABCD} - (S_{ADE} + S_{BEF} + S_{CDF}) = a^2 - \frac{1}{2}\left[a \cdot \frac{x}{\sqrt{2}} + \left(a - \frac{x}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{x}{\sqrt{2}} + a\left(a - \frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]$

$= \frac{1}{4}x^2 - \frac{a}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}a^2 = \left(\frac{1}{2}x - \frac{a}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{3a^2}{8} \geq \frac{3a^2}{8}$.

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{1}{2}x - \frac{a}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow AM = \frac{AC}{2} \Leftrightarrow$ M là trung điểm AC.

Bài 5: *(6,0 điểm)*



a) Chứng minh $EH = EA$**;**

Gọi K là giao điểm của AC và BP.

Ta có: PA = PB (PA, PB là hai tiếp tuyến của (O));

OA = OB (bán kính)

$\Rightarrow$ OP là trung trực AB $\Rightarrow$ OP ⊥ AB

Lại có ΔABC nội tiếp đường tròn đường kính BC

$\Rightarrow \widehat{BAC} = 90^0$ hay AC ⊥ AB. Do đó OP // AC

Xét ΔBCK: $OB = OC = \frac{BC}{2}$ (bán kính (O)); OP // CK (OP // AC) $\Rightarrow PB = PK = \frac{BK}{2}$

Ta có: AH ⊥ BC (gt); BK ⊥ BC (BK là tiếp tuyến của (O)) $\Rightarrow$ AH // BK

ΔBCP có: EH // BP (AH // BK) $\Rightarrow \frac{EH}{PB} = \frac{CE}{CP}$ (hệ quả Ta Lét)

ΔPCK có: EA // KP (AH // BK) $\Rightarrow \frac{EA}{PK} = \frac{CE}{CP}$ (hệ quả Ta Lét)

Do đó $\frac{EH}{PB} = \frac{EA}{PK}$ mà PB = PK (cmt) $\Rightarrow EH = EA$ (đpcm)

b) Tính AH **theo** R **và** $OP = d$**;**

ΔOBP, $\widehat{OBP} = 90^0 \Rightarrow PB = \sqrt{OP^2 - OB^2} = \sqrt{d^2 - R^2} \Rightarrow BK = 2PB = 2\sqrt{d^2 - R^2}$

ΔBCK: $OB = OC = \frac{BC}{2}$; $PB = PK = \frac{BK}{2}$ (cmt),

nên OP là đường trung bình ΔBCK $\Rightarrow CK = 2OP = 2d$

ΔBCK: $\widehat{CBK} = 90^0$, $BA \perp CK$ (cmt) $\Rightarrow BC^2 = AC \cdot CK \Rightarrow AC = \frac{BC^2}{CK} = \frac{4R^2}{2d} = \frac{2R^2}{d}$

ΔBCK: AH // BK (cmt) $\Rightarrow \frac{AH}{BK} = \frac{AC}{CK} \Rightarrow AH = \frac{AC \cdot BK}{CK} = \frac{2R^2 \cdot 2\sqrt{d^2 - R^2}}{d \cdot 2d} = \frac{2R^2 \cdot \sqrt{d^2 - R^2}}{d^2}$

c) Tính AD **theo** R **và** r**;**

Ta có: PO là phân giác $\widehat{APB}$ (PA, PB là tiếp tuyến của (O))

PO' là phân giác $\widehat{DPB}$ (PD, PB là tiếp tuyến của (O'))

Lại có $\widehat{APB}$ và $\widehat{DPB}$ kề bù $\Rightarrow \widehat{OPO'} = 90^0$

ΔOPO': $\widehat{OPO'} = 90^0$ (cmt), PB ⊥ OO' (cmt) $PB^2 = OB \cdot O'B = Rr \Rightarrow PB = \sqrt{Rr}$

Mặt khác PA = PB, PB = PD ⇒ AD = PA + PD = 2PB = $2\sqrt{Rr}$.

d) Giả sử $AD = DM = 4cm$, tính R và r;

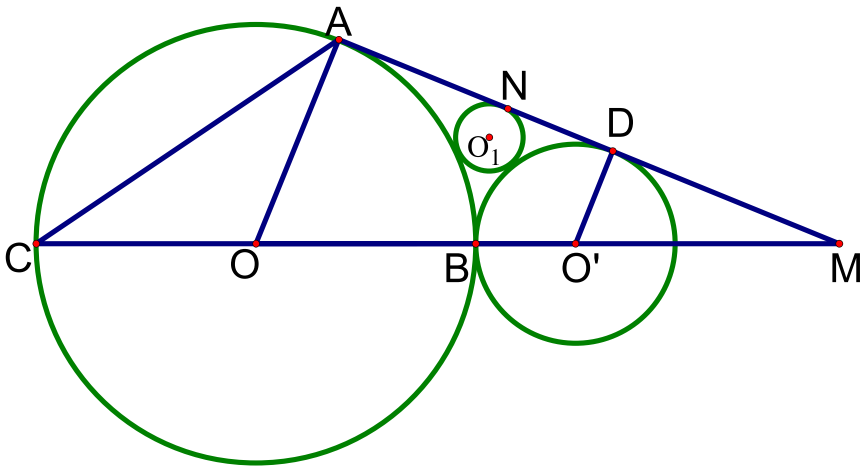
Ta có $AD = 2\sqrt{Rr}$ (cmt), do đó $2\sqrt{Rr} = 4 \Rightarrow Rr = 4\,(a)$

Mặt khác ΔMOA: O'D // OA (cùng vuông góc với MA)

$\Rightarrow \frac{O'D}{OA} = \frac{MD}{MA} \Leftrightarrow \frac{r}{R} = \frac{4}{4+4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow R = 2r\,(b)$

Từ a), b) $\Rightarrow 2r^2 = 4 \Rightarrow r = \sqrt{2}\ cm;\ R = 2r = 2\sqrt{2}\ cm$

e) Chứng minh rằng: $\frac{1}{\sqrt{R_1}} = \frac{1}{\sqrt{R}} + \frac{1}{\sqrt{r}}$.



Gọi N là tiếp điểm của AD với (O_1). Áp dụng kết quả câu c), ta có:

Vì AN là tiếp tuyến chung ngoài của $(O;R)$ và $(O_1;R_1) \Rightarrow AN = 2\sqrt{RR_1}$

Vì DN là tiếp tuyến chung ngoài của $(O';r)$ và $(O_1;R_1) \Rightarrow DN = 2\sqrt{rR_1}$

Do đó $AD = AN + DN \Rightarrow 2\sqrt{Rr} = 2\sqrt{RR_1} + 2\sqrt{rR_1} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{R_1}} = \frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{R}}$ (đpcm)

---------------- Hết ----------------