

Câu 1 (3,0 điểm).

- a) Tìm tất cả các giá trị nguyên của a để $A = a^2 + 4a + 2021$ là một số chính phương.
b) Cho đa thức $P(x)$ với các hệ số nguyên thỏa mãn $P(2019) \cdot P(2020) = 2021$.

Chứng minh rằng đa thức $P(x) - 2022$ không có nghiệm nguyên.

Câu 2 (6,5 điểm).

- a) Giải phương trình $x^2 - 5x + 2 = 2\sqrt{x-1} - \sqrt[3]{x+3}$.
b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} y^2 - y(x^2 - x - 1) = x^2 - x \\ y(x^2 + 1) - x^3 + x^2 = 2. \end{cases}$$

Câu 3 (1,5 điểm). Cho ba số thực không âm a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 3}{a + b + c - abc}$.

Câu 4 (6,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC có D, E, F lần lượt là chân các đường cao kẻ từ ba đỉnh A, B, C của tam giác. Gọi H là trực tâm tam giác ABC và K là trung điểm của HC .

- a) Chứng minh rằng 4 điểm E, K, D, F cùng thuộc một đường tròn.
b) Đường thẳng đi qua K song song với BC cắt DF tại M . Trên tia DE lấy điểm P sao cho $\widehat{MAP} = \widehat{BAC}$. Chứng minh rằng $\frac{S_{AMF}}{S_{AMP}} = \frac{MF}{MP}$ (Trong đó S_{AMF}, S_{AMP} lần lượt là diện tích các tam giác AMF và AMP).

Câu 5 (3,0 điểm).

- a) Cho hình thoi $ABCD$ có $AB = a$. Gọi R_1, R_2 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp của các tam giác ABC và ABD . Chứng minh rằng $R_1 + R_2 \geq a\sqrt{2}$.
b) Cho đa giác đều có 2021 đỉnh, sao cho mỗi đỉnh của đa giác đó chỉ được tô bằng một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng tồn tại 3 đỉnh của đa giác đã cho là các đỉnh của một tam giác cân mà các đỉnh đó được tô cùng một màu.

.....**Hết**.....

Họ và tên thí sinh.....

Số báo danh.....

Chú ý: Thí sinh không được phép sử dụng máy tính bỏ túi.

Câu 1 (3,0 điểm).

- a) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x^2 - y^2 = 6x + 8$.
- b) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}^*$ thì $n^3 + 5n$ chia hết cho 6.

Câu 2 (6,5 điểm).

- a) Giải phương trình $x - 6 = \sqrt{6 - x} - \sqrt{x - 1}$.
- b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + 5x = y^3 + 5y \\ x^4 + y^2 = 2. \end{cases}$$

Câu 3 (1,5 điểm). Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z = 3xy$. Chứng minh rằng
$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{x^3 + y^3}{16z} \geq \frac{7}{8}.$$

Câu 4 (6,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC có D, E, F lần lượt là chân các đường cao kẻ từ ba đỉnh A, B, C của tam giác. Gọi H là trực tâm tam giác ABC và K là trung điểm của HC .

- a) Chứng minh rằng 4 điểm E, K, D, F cùng thuộc một đường tròn.
- b) Đường thẳng đi qua K song song với BC cắt DF tại M . Trên tia DE lấy điểm P sao cho $\widehat{MAP} = \widehat{BAC}$. Chứng minh rằng MA là phân giác $\widehat{FMP}$.

Câu 5 (3,0 điểm).

- a) Cho hình thoi $ABCD$ có $AB = a$. Gọi R_1, R_2 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp của các tam giác ABC và ABD . Chứng minh rằng
$$\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} = \frac{4}{a^2}.$$
- b) Cho đa giác đều có 2021 đỉnh, sao cho mỗi đỉnh của đa giác đó chỉ được tô bằng một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng tồn tại 3 đỉnh của đa giác đã cho là các đỉnh của một tam giác cân mà các đỉnh đó được tô cùng một màu.

.....**Hết**.....

Họ và tên thí sinh.....

Số báo danh.....

Chú ý: Thí sinh không được phép sử dụng máy tính bỏ túi.

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI CHÍNH THỨC

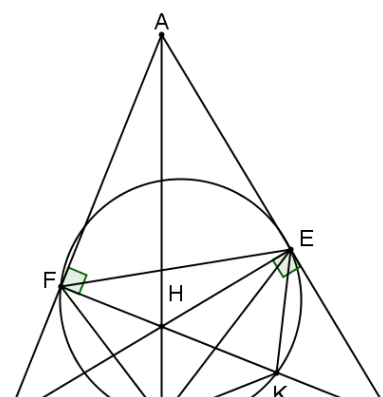
Môn thi: TOÁN – Bảng A

(Hướng dẫn chấm này gồm có 05 trang)

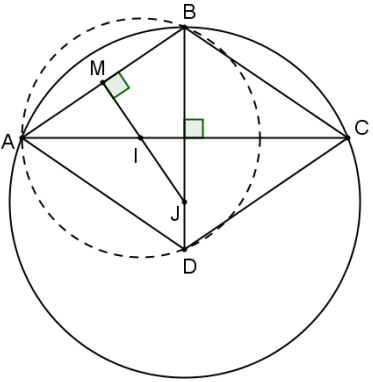
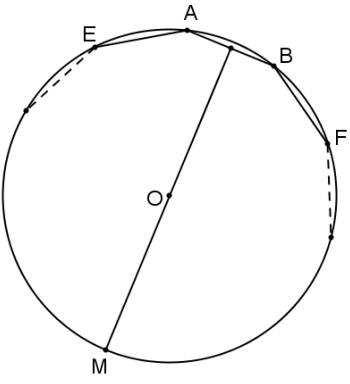
Câu	ĐÁP ÁN THAM KHẢO	Điểm
1.a (1,5đ)	<i>Tìm tất cả các giá trị nguyên của a để $A = a^2 + 4a + 2021$ là một số chính phương.</i>	
	Ta có $a^2 + 4a + 2021 = y^2 \Leftrightarrow (a + 2)^2 + 2017 = y^2$	0,25
	$\Leftrightarrow 2017 = y^2 - (a + 2)^2 \Leftrightarrow (y - a - 2)(y + a + 2) = 2017$ Do 2017 là số nguyên tố nên ta có các trường hợp sau xảy ra	0,25
	+) TH1: $\begin{cases} y - a - 2 = 2017 \\ y + a + 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - a = 2019 \\ y + a = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1009 \\ a = -1010 \end{cases}$	0,25
	+) TH2: $\begin{cases} y - a - 2 = -2017 \\ y + a + 2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - a = -2015 \\ y + a = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1009 \\ a = 1006 \end{cases}$	0,25
	+) TH3: $\begin{cases} y - a - 2 = 1 \\ y + a + 2 = 2017 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - a = 3 \\ y + a = 2015 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1009 \\ a = 1006 \end{cases}$	0,25
	+) TH4: $\begin{cases} y - a - 2 = -1 \\ y + a + 2 = -2017 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - a = 1 \\ y + a = -2019 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1009 \\ a = -1010 \end{cases}$ Vậy có 2 giá trị nguyên của a thỏa mãn yêu cầu bài toán là $a = -1010$ và $a = 1006$.	0,25
1.b (1,5đ)	<i>Cho đa thức $P(x)$ với các hệ số nguyên thỏa mãn $P(2019).P(2020) = 2021$. Chứng minh rằng đa thức $P(x) - 2022$ không có nghiệm nguyên.</i>	
	Giả sử đa thức $P(x) - 2022$ có nghiệm nguyên $x = a$, khi đó $P(x) - 2022 = (x - a).Q(x) \Leftrightarrow P(x) = 2022 + (x - a).Q(x)$. (Với $Q(x)$ là đa thức hệ số nguyên)	0,25
	Khi đó: • $P(2019) = 2022 + (2019 - a).Q(2019)$	0,25
	• $P(2020) = 2022 + (2020 - a).Q(2020)$	0,25
	Mà $P(2019).P(2020) = 2021 \Rightarrow$ $[2022 + (2019 - a).Q(2019)][2022 + (2020 - a).Q(2020)] = 2021$ $\Leftrightarrow 2022^2 + 2022[(2019 - a).Q(2019) + (2020 - a).Q(2020)] +$ $(2019 - a)(2020 - a)Q(2019).Q(2020) = 2021 \quad (*)$	0,5
	Do $(2019 - a)(2020 - a)$ là hai số tự nhiên liên tiếp, suy ra vế trái của $(*)$ là số chẵn. Vậy không tồn tại a để đẳng thức $(*)$ xảy ra. Hay đa thức $P(x) - 2022$ không có nghiệm nguyên.	0,25

2.a (3,0đ)	Giải phương trình $x^2 - 5x + 2 = 2\sqrt{x-1} - \sqrt[3]{x+3}$.	
	Điều kiện: $x \geq 1$. Phương trình đã cho tương đương với $x^2 - 5x + 2 - 2\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x+3} = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}(\sqrt{x-1}-2) + (\sqrt[3]{x+3}-2) + x^2 - 6x + 5 = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} \frac{(x-5)}{\sqrt{x-1}+2} + \frac{x-5}{\sqrt[3]{(x+3)^2} + 2\sqrt[3]{x+3} + 4} + (x-1)(x-5) = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow (x-5) \left(\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}+2} + \frac{1}{\sqrt[3]{(x+3)^2} + 2\sqrt[3]{x+3} + 4} + x-1 \right) = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow x = 5,$	0,5
	do $\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}+2} + \frac{1}{\sqrt[3]{(x+3)^2} + 2\sqrt[3]{x+3} + 4} + x-1 > 0, \forall x \geq 1$. Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $T = \{5\}$.	0,5
2.b (3,5đ)	Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2 - y(x^2 - x - 1) = x^2 - x \\ y(x^2 + 1) - x^3 + x^2 = 2 \end{cases}$	
	Ta có $y^2 - y(x^2 - x - 1) = x^2 - x \Leftrightarrow (y^2 - 1) - (x^2 - x - 1)(y + 1) = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow (y+1)(y-x^2+x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = x^2 - x \end{cases}$	0,75
	+) Với $y = -1$, thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được $x^3 = -3 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{-3}$. Khi đó hệ có nghiệm $\begin{cases} x = \sqrt[3]{-3} \\ y = -1 \end{cases}$	0,5
	+) Với $y = x^2 - x$, thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được $(x^2 - x)(x^2 + 1) - x^3 + x^2 = 2 \Leftrightarrow x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow (x^2 - x)^2 + (x^2 - x) - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x = 1 \\ x^2 - x = -2 \end{cases}$	0,5
	+) TH1: $x^2 - x + 2 = 0$ (vô nghiệm)	0,25
	+) TH2: $x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Khi đó hệ có các nghiệm $\begin{cases} x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ y = 1 \end{cases}; \begin{cases} x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ y = 1 \end{cases}$.	0,5

	Vậy hệ phương trình đã cho có các nghiệm $\begin{cases} x = \sqrt[3]{-3} \\ y = -1 \end{cases}; \begin{cases} x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ y = 1 \end{cases}; \begin{cases} x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ y = 1 \end{cases}$.	
3 (1,5đ)	Cho ba số thực không âm a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 3}{a + b + c - abc}.$	
	Ta có +) $a^2 + b^2 + c^2 + 3 = a^2 + b^2 + c^2 + 3(ab + bc + ca)$ $= (a+b)(b+c) + (c+a)(a+b) + (b+c)(c+a)$	0,25
	+) $a + b + c - abc = (a+b+c)(ab + bc + ca) - abc$ $= (a+b)(b+c)(c+a)$ Khi đó suy ra $P = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}.$	0,25
	Theo nguyên lí Dirichlet trong ba số thực a, b, c luôn tồn tại hai số ≥ 1 hoặc ≤ 1 . Giả sử hai số đó là a và b . Khi đó: $(1-a)(1-b) \geq 0 \Leftrightarrow a + b \leq ab + 1$	0,25
	Lại có $ab + bc + ca = 1 \Rightarrow 1 - ab = c(a+b) \geq 0 \Rightarrow ab \leq 1$ Từ đó suy ra $0 < a + b \leq ab + 1 \leq 2$	0,25
	Ta lại có: +) $\frac{1}{c+a} = \frac{a+b}{(c+a)(a+b)} = \frac{a+b}{a^2+1} = (a+b) - \frac{a^2(a+b)}{a^2+1} = (a+b) - \frac{a(a+b)}{a + \frac{1}{a}} \geq a+b - \frac{a(a+b)}{2}.$ +) Hoàn toàn tương tự ta có: $\frac{1}{b+c} \geq a+b - \frac{b(a+b)}{2}$ Từ đó ta có $P = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{1}{a+b} + 2(a+b) - \frac{(a+b)^2}{2}$	0,25
	Đặt $a+b=x, 0 < x \leq 2$. Khi đó $P \geq \frac{1}{x} + 2x - \frac{x^2}{2} = \frac{2+4x^2-x^3}{2x}$ $= \frac{(x-1)^2(2-x)+5x}{2x} = \frac{5}{2} + \frac{(x-1)^2(2-x)}{2x} \geq \frac{5}{2}.$ Vậy $\min P = \frac{5}{2}$ đạt được khi và chỉ khi $a=1; b=1; c=0$ và các hoán vị.	0,25
4.a (3,0đ)	Cho tam giác nhọn ABC có D, E, F lần lượt là chân các đường cao kẻ từ ba đỉnh A, B, C của tam giác. Gọi H là trực tâm tam giác ABC và K là trung điểm của HC. a) Chứng minh rằng 4 điểm E, K, D, F cùng thuộc một đường tròn.	
	+) Do EK là trung tuyến của tam giác vuông $EHC \Rightarrow KE = KC \Rightarrow \widehat{KEC} = \widehat{ECK}$	0,75
	$\Rightarrow \widehat{EKF} = \widehat{KCE} + \widehat{KEC} = 2\widehat{ECK} \quad (1)$	0,5



	+) Do tứ giác HDCE nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ECK} = \widehat{EDH}$ +) Do tứ giác FECB nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ECK} = \widehat{FBH}$ +) Do tứ giác FBDH nội tiếp $\Rightarrow \widehat{FBH} = \widehat{FDH}$	0,75
	Từ đó suy ra $\widehat{FDE} = \widehat{FDH} + \widehat{EDH} = 2\widehat{HDE} = 2\widehat{ECK} \quad (2)$	0,5
	Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{EKF} = \widehat{FDE} \Rightarrow$ tứ giác FDKE nội tiếp hay 4 điểm F,D,K,E cùng thuộc một đường tròn.	0,5
4.b (3,0đ)	Cho tam giác nhọn ABC có D,E,F lần lượt là chân các đường cao kẻ từ ba đỉnh A,B,C của tam giác. Gọi H là trực tâm tam giác ABC và K là trung điểm của HC. b) Đường thẳng đi qua K song song với BC cắt DF tại M. Trên tia DE lấy điểm P sao cho $\widehat{MAP} = \widehat{BAC}$. Chứng minh rằng $\frac{S_{AMF}}{S_{AMP}} = \frac{MF}{MP}$ (Trong đó S_{AMF}, S_{AMP} lần lượt là diện tích các tam giác AMF và AMP).	
	Gọi N là giao điểm của MK và DE.	0,25
	+) Do $MN \parallel BC \Rightarrow \widehat{BDN} = \widehat{MNE} \quad (4)$	0,25
	+) Do ABDE là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BDE} + \widehat{BAE} = 180^\circ \quad (5)$	0,25
	+) Theo bài ra $\widehat{BAC} = \widehat{MAP}$ nên từ (4), (5) suy ra $\widehat{MNP} + \widehat{MAP} = 180^\circ$ $\Rightarrow$ MNPA là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AMP} = \widehat{ANP} \quad (6)$	0,5
	+) Lại có $\triangle AMD = \triangle AND$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AMD} = \widehat{AND} \Rightarrow 180^\circ - \widehat{AMD} = 180^\circ - \widehat{AND} \Rightarrow \widehat{AMF} = \widehat{ANP} \quad (7)$	0,5
	Từ (6) và (7) suy ra $\widehat{AMP} = \widehat{AMF} = \varphi$.	0,25
	Gọi h_1, h_2 lần lượt là độ dài đường cao kẻ từ đỉnh F và P của các tam giác AMF và AMP. Ta có : $S_{AMF} = \frac{1}{2} h_1 \cdot MA = \frac{1}{2} (MF \cdot \sin \varphi) \cdot MA$; tương tự $S_{AMP} = \frac{1}{2} MA \cdot MP \cdot \sin \varphi$.	0,75
	Từ đó suy ra $\frac{S_{AMF}}{S_{AMP}} = \frac{MF}{MP}$.	0,25
5.a (1,5đ)	Cho hình thoi ABCD có $AB = a$. Gọi R_1, R_2 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC và ABD. Chứng minh rằng $R_1 + R_2 \geq a\sqrt{2}$.	

	Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Đường trung trực của đoạn AB cắt các đường AC và BD lần lượt tại I và J. Khi đó I và J lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp của các tam giác ABD và ABC.		0,25
	Dễ thấy $\triangle MAI \sim \triangle MJB$ (g.g) $\Rightarrow \frac{MA}{AI} = \frac{MJ}{JB} \Rightarrow \frac{MA}{R_2} = \frac{MJ}{R_1}$		0,25
	$\Rightarrow \frac{MA^2}{R_2^2} = \frac{MJ^2}{R_1^2} \Rightarrow \frac{MA^2}{R_2^2} = \frac{JB^2 - MB^2}{R_1^2}$		0,25
	$\Rightarrow \frac{MA^2}{R_2^2} = \frac{R_1^2 - MB^2}{R_1^2} \Rightarrow \frac{MA^2}{R_2^2} + \frac{MB^2}{R_1^2} = 1 \Rightarrow \frac{a^2}{4R_1^2} + \frac{a^2}{4R_2^2} = 1$		0,25
	Khi đó $1 = \frac{a^2}{4R_1^2} + \frac{a^2}{4R_2^2} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{4R_1^2} \cdot \frac{a^2}{4R_2^2}} = \frac{a^2}{2R_1R_2} \Rightarrow R_1R_2 \geq \frac{a^2}{2}$.		0,25
	Do đó $R_1 + R_2 \geq 2\sqrt{R_1R_2} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{2}} = a\sqrt{2}$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow R_1 = R_2$ hay tứ giác ABCD là hình vuông.		0,25
5.b (1,5đ)	Cho đa giác đều có 2021 đỉnh sao cho mỗi đỉnh của đa giác đó chỉ được tô bằng một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng tồn tại 3 đỉnh của đa giác đã cho là các đỉnh của một tam giác cân mà các đỉnh đó được tô cùng một màu. Do đa giác đã cho là đa giác đều nên đa giác đó nội tiếp đường tròn tâm O. Do 2021 là số lẻ nên tồn tại 2 đỉnh kề nhau tô cùng màu. Giả sử hai đỉnh đó là A và B và cùng được tô màu đỏ. Cũng do đa giác đã cho đều và có số đỉnh lẻ nên tồn tại đỉnh M của đa giác nằm trên trung trực đoạn AB $\Rightarrow \triangle MAB$ cân. Ta xét hai khả năng xảy ra: +) Khả năng 1: Nếu M tô màu đỏ $\Rightarrow$ đpcm. +) Khả năng 2: Nếu M tô màu xanh. Gọi E, F là các đỉnh kề của A và B có: $EA = AB = BF \Rightarrow EF \parallel AB \Rightarrow \triangle MEF$ cân tại M. Khi đó: - Nếu E, F màu xanh $\Rightarrow \triangle MEF$ cân và thỏa mãn bài toán. - Nếu một trong hai đỉnh E, F màu đỏ, giả sử E màu đỏ $\Rightarrow \triangle EAB$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Vậy luôn tồn tại 3 đỉnh của đa giác đều đã cho lập nên một tam giác cân có các đỉnh cùng màu.		0,25 0,25 0,25 0,25 0,25

.....**Hết**.....

Ghi chú: Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn cho điểm tối đa.

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI CHÍNH THỨC

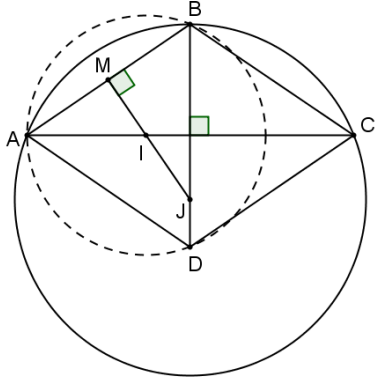
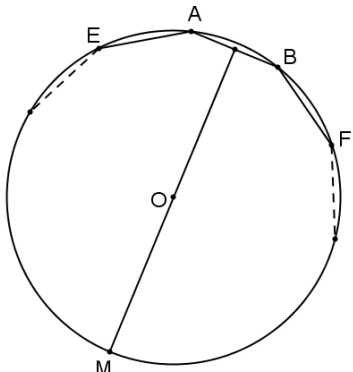
Môn thi: TOÁN – Bảng B

(Hướng dẫn chấm này gồm có 04 trang)

Câu	ĐÁP ÁN THAM KHẢO	Điểm
1.a (1,5đ)	<i>Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x^2 - y^2 = 6x + 8$.</i>	
	Ta có $x^2 - y^2 = 6x + 8 \Leftrightarrow (x^2 - 6x + 9) - y^2 = 17$	0,25
	$\Leftrightarrow (x - 3)^2 - y^2 = 17 \Leftrightarrow (x - 3 - y)(x - 3 + y) = 17$	0,25
	Do 17 là số nguyên tố nên ta có các trường hợp sau: +) TH1: $\begin{cases} x - 3 - y = 17 \\ x - 3 + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 20 \\ x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = -8 \end{cases}$	0,25
	+) TH2: $\begin{cases} x - 3 - y = -17 \\ x - 3 + y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -14 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = 8 \end{cases}$	0,25
	+) TH3: $\begin{cases} x - 3 - y = 1 \\ x - 3 + y = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 8 \end{cases}$	0,25
	+) TH3: $\begin{cases} x - 3 - y = -1 \\ x - 3 + y = -17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = -14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = -8 \end{cases}$ Vậy các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\{(12; -8), (-6; 8), (12; 8), (-6; -8)\}$.	0,25
1.b (1,5đ)	<i>Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}^*$ thì $n^3 + 5n$ chia hết cho 6.</i>	
	Ta có $n^3 + 5n = (n^3 - n) + 6n$	0,25
	$= n(n - 1)(n + 1) + 6n$	0,5
	Do $n(n - 1)(n + 1)$ là tích của ba số tự nhiên liên tiếp $\Rightarrow n(n - 1)(n + 1) : 6$	0,5
	Lại do $6n : 6$, từ đó suy ra $n(n - 1)(n + 1) + 6n : 6 \Rightarrow n^3 + 5n : 6$	0,25
2.a (3,0đ)	<i>Giải phương trình $x - 6 = \sqrt{6 - x} - \sqrt{x - 1}$.</i>	

	Điều kiện $1 \leq x \leq 6$	0,5
	Phương trình đã cho tương đương với $x - 6 + \sqrt{x-1} - \sqrt{6-x} = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow (x-5) + (\sqrt{x-1} - 2) + (1 - \sqrt{6-x}) = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow (x-5) + \frac{x-5}{\sqrt{x-1}+2} + \frac{x-5}{1+\sqrt{6-x}} = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow (x-5) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x-1}+2} + \frac{1}{1+\sqrt{6-x}} \right) = 0 \Leftrightarrow x = 5,$	0,5
	Do $1 + \frac{1}{\sqrt{x-1}+2} + \frac{1}{1+\sqrt{6-x}} > 0, \forall x \in [1;6]$ Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 5$.	0,5
2.b (3,5đ)	Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + 5x = y^3 + 5y \\ x^4 + y^2 = 2. \end{cases}$	
	Ta có $x^3 + 5x = y^3 + 5y \Leftrightarrow (x^3 - y^3) + 5(x - y) = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2) + 5(x - y) = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2 + 5) = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow x = y$, do $x^2 + xy + y^2 + 5 > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$.	1,0
	Với $x = y$, thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được $x^4 + x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 + 2) = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow x^2 = 1$, do $x^2 + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$	0,5
	$\Leftrightarrow x = \pm 1$. Vậy hệ phương trình đã cho có các nghiệm $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}; \begin{cases} x = -1 \\ y = -1. \end{cases}$	0,5
3 (1,5đ)	Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z = 3xy$. Chứng minh rằng $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{x^3 + y^3}{16z} \geq \frac{7}{8}.$	
	Ta có $3xy = x^2 + y^2 + z \geq 2xy + z \Rightarrow xy \geq z$ Suy ra :	0,25
	+) $\frac{x^3 + y^3}{16z} = \frac{(x+y)(x^2 + y^2 - xy)}{16z} \geq \frac{(x+y)xy}{16z} \geq \frac{x+y}{16}$ (1)	0,25
	+) $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} = \frac{x^2}{xy+xz} + \frac{y^2}{xy+yz} \geq \frac{(x+y)^2}{2xy+z(x+y)} \geq \frac{(x+y)^2}{xy(2+x+y)} \geq \frac{4}{2+x+y}$ (2)	0,5

	Từ (1) và (2) cho ta $P \geq \frac{4}{(x+y)+2} + \frac{x+y}{16} \Rightarrow P \geq \frac{4}{x+y+2} + \frac{x+y+2}{16} - \frac{1}{8}$ $\geq 2\sqrt{\frac{4}{x+y+2} \cdot \frac{x+y+2}{16}} - \frac{1}{8} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$. Vậy $\min P = \frac{7}{8} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=3 \\ z=9 \end{cases}$	0,5
4.a (3,0đ)	Cho tam giác nhọn ABC có D,E,F lần lượt là chân các đường cao kẻ từ ba đỉnh A,B,C của tam giác. Gọi H là trực tâm tam giác ABC và K là trung điểm của HC. a) Chứng minh rằng 4 điểm E,K,D,F cùng thuộc một đường tròn. +) Do EK là trung tuyến của tam giác vuông EHC $\Rightarrow KE = KC \Rightarrow \widehat{KEC} = \widehat{ECK}$ $\Rightarrow \widehat{EKF} = \widehat{KCE} + \widehat{KEC} = 2\widehat{ECK}$ (1) +) Do tứ giác HDCE nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ECK} = \widehat{EDH}$ +) Do tứ giác FECB nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ECK} = \widehat{FBH}$ +) Do tứ giác FBDH nội tiếp $\Rightarrow \widehat{FBH} = \widehat{FDH}$ Từ đó suy ra $\widehat{FDE} = \widehat{FDH} + \widehat{EDH} = 2\widehat{HDE} = 2\widehat{ECK}$ (2) Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{EKF} = \widehat{FDE} \Rightarrow$ tứ giác FDKE nội tiếp hay 4 điểm F,D,K,E cùng thuộc một đường tròn.	0,5 0,5 1,0 0,5 0,5
4.b (3,0đ)	Cho tam giác nhọn ABC có D,E,F lần lượt là chân các đường cao kẻ từ ba đỉnh A,B,C của tam giác. Gọi H là trực tâm tam giác ABC và K là trung điểm của HC. b) Đường thẳng đi qua K song song với BC cắt DF tại M. Trên tia DE lấy điểm P sao cho $\widehat{MAP} = \widehat{BAC}$. Chứng minh rằng MA là phân giác $\widehat{FMP}$. Gọi N là giao điểm của MK và DE. +) Do $MN \parallel BC \Rightarrow \widehat{BDN} = \widehat{MNE}$ (4) +) Do ABDE là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BDE} + \widehat{BAE} = 180^\circ$ (5) +) Theo bài ra $\widehat{BAC} = \widehat{MAP}$ nên từ (4), (5) suy ra $\widehat{MNP} + \widehat{MAP} = 180^\circ$ $\Rightarrow$ MNPA là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AMP} = \widehat{ANP}$ (6) +) Lại có $\triangle AMD = \triangle AND$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AMD} = \widehat{AND}$ $\Rightarrow 180^\circ - \widehat{AMD} = 180^\circ - \widehat{AND} \Rightarrow \widehat{AMF} = \widehat{ANP}$ (7) Từ (6) và (7) suy ra $\widehat{AMP} = \widehat{AMF} \Rightarrow$ MA là phân giác $\widehat{FMP}$.	0,5 0,5 0,5 0,5 0,5 0,5 0,5

5.a (1,5đ)	Cho hình thoi ABCD có $AB = a$. Gọi R_1, R_2 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp của các tam giác ABC và ABD. Chứng minh rằng $\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} = \frac{4}{a^2}$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Đường trung trực của đoạn AB cắt các đường AC và BD lần lượt tại I và J. Khi đó I và J lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp của các tam giác ABD và ABC. Để thấy $\triangle MAI \sim \triangle MJB$ (g.g) $\Rightarrow \frac{MA}{AI} = \frac{MJ}{JB}$ $\Rightarrow \frac{MA}{R_2} = \frac{MJ}{R_1} \Rightarrow \frac{MA^2}{R_2^2} = \frac{MJ^2}{R_1^2}$ $\Rightarrow \frac{MA^2}{R_2^2} = \frac{JB^2 - MB^2}{R_1^2}$ $\Rightarrow \frac{MA^2}{R_2^2} = \frac{R_1^2 - MB^2}{R_1^2} \Rightarrow \frac{MA^2}{R_2^2} + \frac{MB^2}{R_1^2} = 1$ $\Rightarrow \frac{a^2}{4R_1^2} + \frac{a^2}{4R_2^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} = \frac{4}{a^2}$. 	0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25
5.b (1,5đ)	Cho đa giác đều có 2021 đỉnh sao cho mỗi đỉnh của đa giác đó chỉ được tô bằng một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng tồn tại 3 đỉnh của đa giác đã cho là các đỉnh của một tam giác cân mà các đỉnh đó được tô cùng một màu. Do đa giác đã cho là đa giác đều nên đa giác đó nội tiếp đường tròn tâm O. Do 2021 là số lẻ nên tồn tại 2 đỉnh kề nhau tô cùng màu. Giả sử hai đỉnh đó là A và B và cùng được tô màu đỏ. Cũng do đa giác đã cho đều và có số đỉnh lẻ nên tồn tại đỉnh M của đa giác nằm trên trung trực đoạn AB $\Rightarrow \triangle MAB$ cân. Ta xét hai khả năng xảy ra: +) Khả năng 1: Nếu M tô màu đỏ $\Rightarrow$ đpcm. +) Khả năng 2: Nếu M tô màu xanh. Gọi E, F là các đỉnh kề của A và B có: $EA = AB = BF \Rightarrow EF \parallel AB \Rightarrow \triangle MEF$ cân tại M. Khi đó: - Nếu E, F màu xanh $\Rightarrow \triangle MEF$ cân và thỏa mãn bài toán. - Nếu một trong hai đỉnh E, F màu đỏ, giả sử E màu đỏ $\Rightarrow \triangle EAB$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Vậy luôn tồn tại 3 đỉnh của đa giác đều đã cho lập nên một tam giác cân có các đỉnh cùng màu. 	0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25

.....**Hết**.....

Ghi chú: Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn cho điểm tối đa.