

ĐỀ THI VÀ LỜI GIẢI HSG TOÁN 9 HƯNG YÊN 2024

0.1 ĐỀ THI

Câu 1 (4,0 điểm). Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x} + 1}{3 - \sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x} + 7}{x - 4\sqrt{x} + 3} \right) : \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} \right)$ với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 9$.

a) Rút gọn và tính giá trị của biểu thức A khi $x = 7 - 4\sqrt{3}$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\frac{1}{A}$.

Câu 2 (4,0 điểm).

a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $M(3; 5)$. Lập phương trình đường thẳng d đi qua M và cắt các tia Ox, Oy tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng 30 (đvdt).

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn: $y^2(x - 4)^2 - x^3 + 10x^2 - 32x + 14 = 0$.

Câu 3 (4,0 điểm).

a) Giải phương trình: $3\sqrt{x - 1} - \sqrt{x + 3} + 3\sqrt{x^2 + 2x - 3} = 5x - 3$.

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x + 1} + \sqrt{xy - 2x + y - 2} + x + 5 = 2y + \sqrt{y - 2} \\ \frac{xy + 3x - 6y - 18}{x^2 - 6x + 12} = (y - 3)(\sqrt{x + 3} - 3) \end{cases}$$

Câu 4 (2,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC có H, G lần lượt là trực tâm, trọng tâm và HG song song với BC . Tính $\tan B \cdot \tan C$.

Câu 5 (4,0 điểm). Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB . Lấy điểm H cố định thuộc đoạn thẳng OA (H không trùng với O và A). Đường thẳng vuông góc với AB tại H cắt nửa đường tròn tâm O tại C . Gọi D là điểm đối xứng với A qua C ; I, J lần lượt là trung điểm của CH và DH .

a) Chứng minh hai tam giác CHJ và HBI đồng dạng.

b) Gọi Bx là tia tiếp tuyến của nửa đường tròn tâm O . Lấy điểm E di động trên Bx (E không trùng với B). Đường thẳng qua H vuông góc với AE cắt đường thẳng BE tại F . Chứng minh đường tròn đường kính EF luôn đi qua hai điểm cố định khi E di động trên tia Bx .

Câu 6 (2,0 điểm). Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = 12(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{4(ab + bc + ca)}{a^2 + b^2 + c^2} + 2024$.

— HẾT —

0.2 LỜI GIẢI

Câu 1

Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+7}{x-4\sqrt{x}+3} \right) : \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right)$
với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 9$.

- a) Rút gọn và tính giá trị của biểu thức A khi $x = 7 - 4\sqrt{3}$.
b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\frac{1}{A}$.

Lời giải

a) Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+7}{x-4\sqrt{x}+3} \right) : \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right) \\ A &= \frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3) - (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1) + \sqrt{x}+7}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-3)} : \frac{1}{\sqrt{x}+1} \\ A &= \frac{x-9-x+1+\sqrt{x}+7}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-3)} \cdot (\sqrt{x}+1) \\ A &= \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-3)} \cdot (\sqrt{x}+1). \\ A &= \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} \end{aligned}$$

Vậy $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$ với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 9$.

Ta có: $x = 7 - 4\sqrt{3} = (2 - \sqrt{3})^2$ nên $\sqrt{x} = 2 - \sqrt{3}$.

Thay $\sqrt{x} = 2 - \sqrt{3}$ vào biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$ ta được: $A = \frac{2 - \sqrt{3} + 1}{2 - \sqrt{3} - 3} = \frac{3 - \sqrt{3}}{-1 - \sqrt{3}} = 3 - 2\sqrt{3}$.

Vậy $A = 3 - 2\sqrt{3}$ tại $x = 7 - 4\sqrt{3}$

b) Ta có: $\frac{1}{A} = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1} = 1 - \frac{4}{\sqrt{x}+1}$.

Vì $\sqrt{x}+1 \geq 1$ nên $\frac{4}{\sqrt{x}+1} \leq 4 \Rightarrow \frac{1}{A} = 1 - \frac{4}{\sqrt{x}+1} \geq 1 - 4 = -3$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{x}+1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$ (thỏa mãn ĐKXD).

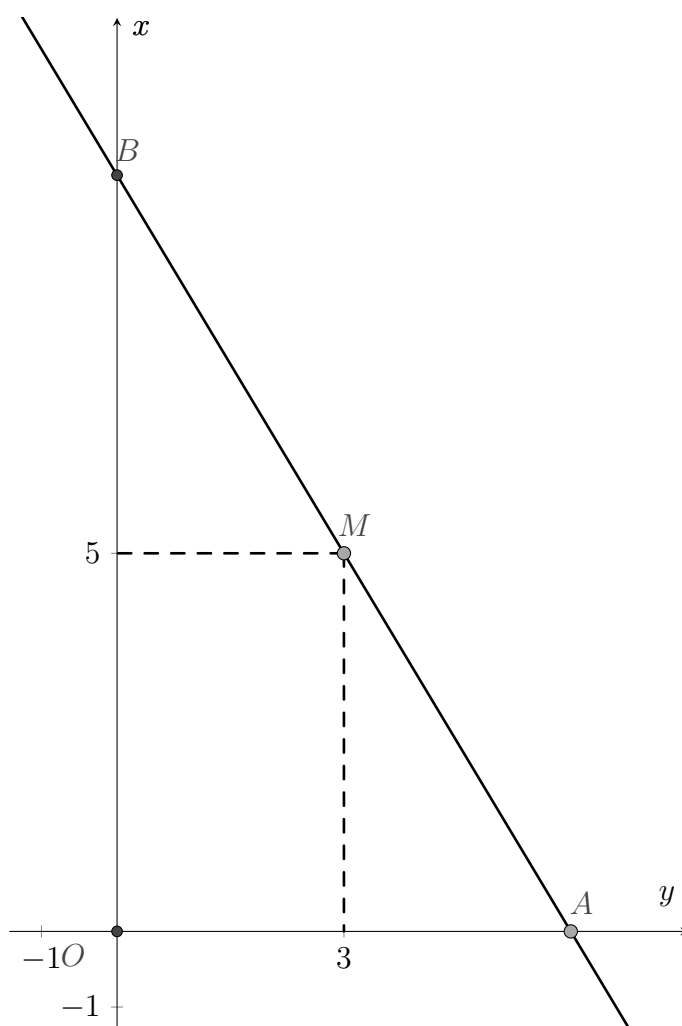
Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\frac{1}{A}$ là -3 khi $x = 0$

Câu 2

- a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $M(3; 5)$. Lập phương trình đường thẳng d đi qua M và cắt các tia Ox, Oy tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng 30 (đvdt).
- b) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn: $y^2(x - 4)^2 - x^3 + 10x^2 - 32x + 14 = 0$.

Lời giải

a) .



Gọi $(d) : y = ax + b$ ($a \neq 0$) là đường thẳng đi qua M và cắt các tia Ox, Oy tại A, B .

Vì (d) cắt tia Ox tại A nên A có hoành độ dương, tọa độ điểm A là $\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$

$$\Rightarrow OA = \left| -\frac{b}{a} \right| = -\frac{b}{a}. \quad (1)$$

Vì (d) cắt tia Oy tại B nên B có tung độ dương, tọa độ điểm B là $(0; b) \Rightarrow OB = |b| = b \quad (2)$

Từ (1), (2) $\Rightarrow a < 0, b > 0$.

Vì (d) đi qua $M(3; 5)$ nên $3a + b = 5 \Leftrightarrow b = 5 - 3a$ (*)

Vì diện tích tam giác OAB bằng 30 (đvdt) nên ta có:

$$\frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = 30 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{-b}{a} \cdot b = 30 \Leftrightarrow b^2 = -60a \Leftrightarrow (5 - 3a)^2 = -60a \Leftrightarrow (3a + 5)^2 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{5}{3}$$

Thay $a = -\frac{5}{3}$ vào (*) ta được: $b = 5 - 3\left(-\frac{5}{3}\right) = 10$.

Vậy $(d) : y = -\frac{5}{3}x + 10$ là đường thẳng cần tìm.

b) Ta có:

$$\begin{aligned} y^2(x - 4)^2 - x^3 + 10x^2 - 32x + 14 &= 0 \\ \Leftrightarrow y^2(x - 4)^2 &= x^3 - 10x^2 + 32x - 14 \quad (1) \end{aligned}$$

Với $x = 4$ thì không có giá trị y thỏa mãn.

Với $x \neq 4$ thì ta có:

$$\begin{aligned} (1) \Leftrightarrow y^2 &= \frac{x^3 - 10x^2 + 32x - 14}{x^2 - 8x + 16} \\ \Leftrightarrow y^2 &= \frac{(x^3 - 8x^2 + 16x) - (2x^2 - 16x + 32) + 18}{x^2 - 8x + 16} \\ \Leftrightarrow y^2 &= x - 2 + \frac{18}{(x - 4)^2} \end{aligned}$$

Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $\frac{18}{(x - 4)^2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (x - 4)^2 \in U_{(18)} = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6; \pm 9; \pm 18\}$

Mà $(x - 4)^2$ là số chính phương nên $(x - 4)^2 \in \{1; 9\}$

$$\bullet \text{ TH1: } (x - 4)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 = 1 \\ x - 4 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = 3 \end{cases}$$

Với $x = 5$ thì $y^2 = 21 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{21}$ (loại vì $y \in \mathbb{Z}$)

Với $x = 3$ thì $y^2 = 19 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{19}$ (loại vì $y \in \mathbb{Z}$)

$$\bullet \text{ TH2: } (x - 4)^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 = 3 \\ x - 4 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = 1 \end{cases}$$

Với $x = 7$ thì $y^2 = 7 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{7}$ (loại vì $y \in \mathbb{Z}$)

Với $x = 1$ thì $y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm 1$ (thỏa mãn).

Vậy $(x, y) \in \{(1; 1); (1; -1)\}$

Câu 3

a) Giải phương trình: $3\sqrt{x-1} - \sqrt{x+3} + 3\sqrt{x^2+2x-3} = 5x-3$.

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{xy-2x+y-2} + x+5 = 2y + \sqrt{y-2} \\ \frac{xy+3x-6y-18}{x^2-6x+12} = (y-3)(\sqrt{x+3}-3) \end{cases}$$

Lời giải

a) $3\sqrt{x-1} - \sqrt{x+3} + 3\sqrt{x^2+2x-3} = 5x-3$ (1)

ĐKXĐ: $x \geq 1$

Đặt $\begin{cases} \sqrt{x-1} = a \\ \sqrt{x+3} = b \end{cases}$ ($a, b \geq 0$) thì $\sqrt{x^2+2x-3} = ab$.

Ta có: $5x-3 = \frac{9}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(x+3) = \frac{9}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$

Phương trình (1) trở thành:

$$\begin{aligned} 3a - b + 3ab &= \frac{9}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 \\ \Leftrightarrow 6a - 2b + 6ab &= 9a^2 + b^2 \\ \Leftrightarrow (3a - b)^2 - 2(3a - b) &= 0 \\ \Leftrightarrow (3a - b)(3a - b - 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = b \\ 3a = b + 2 \end{cases} \end{aligned}$$

TH1: $3a = b$, tức là

$$\begin{aligned} 3\sqrt{x-1} &= \sqrt{x+3} \\ \Leftrightarrow 9x - 9 &= x + 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \text{ (thỏa mãn ĐKXĐ)} \end{aligned}$$

TH2: $3a = b + 2$, tức là

$$\begin{aligned} 3\sqrt{x-1} &= \sqrt{x+3} + 2 \\ \Leftrightarrow 9x - 9 &= x + 7 + 4\sqrt{x+3} \Leftrightarrow 2x - 4 = \sqrt{x+3} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 4x^2 - 16x + 16 = x + 3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 4x^2 - 17x + 13 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \begin{bmatrix} x = 1 \\ x = \frac{13}{4} \end{bmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{13}{4} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{3}{2}$ và $x = \frac{13}{4}$.

$$\text{b) } \begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{xy-2x+y-2} + x+5 = 2y + \sqrt{y-2} & (1) \\ \frac{xy+3x-6y-18}{x^2-6x+12} = (y-3)(\sqrt{x+3}-3) & (2) \end{cases}$$

ĐKXĐ: $x \geq -1, y \geq 2$

Ta có: (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)(y-2)} + x+1 - 2(y-2) - \sqrt{y-2} = 0$

Đặt $\begin{cases} \sqrt{x+1} = a \\ \sqrt{y-2} = b \end{cases} \quad (a, b \geq 0)$, phương trình trên trở thành:

$$\begin{aligned} a + ab + a^2 - 2b^2 - b &= 0 \Leftrightarrow (a-b)(a+2b+1) = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=0 \\ a+2b+1=0 \end{cases} & \text{(loại vì } a, b \geq 0 \text{ nên } a+2b+1 > 0) \end{aligned}$$

Do đó $a = b$, tức là:

$$\sqrt{x+1} = \sqrt{y-2} \Leftrightarrow x+1 = y-2 \Leftrightarrow x+3 = y \quad (*)$$

Ta có: (2) $\Leftrightarrow \frac{(x-6)(y+3)}{x^2-6x+12} = (y-3) \frac{x-6}{\sqrt{x+3}+3}$

$$\Leftrightarrow (x-6) \left(\frac{y+3}{x^2-6x+12} - \frac{y-3}{\sqrt{x+3}+3} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ \frac{y+3}{x^2-6x+12} = \frac{y-3}{\sqrt{x+3}+3} \end{cases}$$

TH1: $x=6$, thay vào (*) ta được $y=9$

TH2: $\frac{y+3}{x^2-6x+12} = \frac{y-3}{\sqrt{x+3}+3}$ (**), thay (*) vào (**) ta được:

$$\frac{x+6}{x^2-6x+12} = \frac{x}{\sqrt{x+3}+3}$$

$$\Leftrightarrow (x+6)(\sqrt{x+3}+3) = x(x^2-6x+12)$$

$$\Leftrightarrow [(x+3)+3](\sqrt{x+3}+3) = [(x-3)+3][(x-3)^2+3]$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+3})^3 + 3(\sqrt{x+3})^2 + 3\sqrt{x+3} = (x-3)^3 + 3(x-3)^2 + 3(x-3)$$

$$\text{Ta suy ra } \sqrt{x+3} = x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2-7x+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ \begin{cases} x=1 \\ x=6 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \end{cases}$$

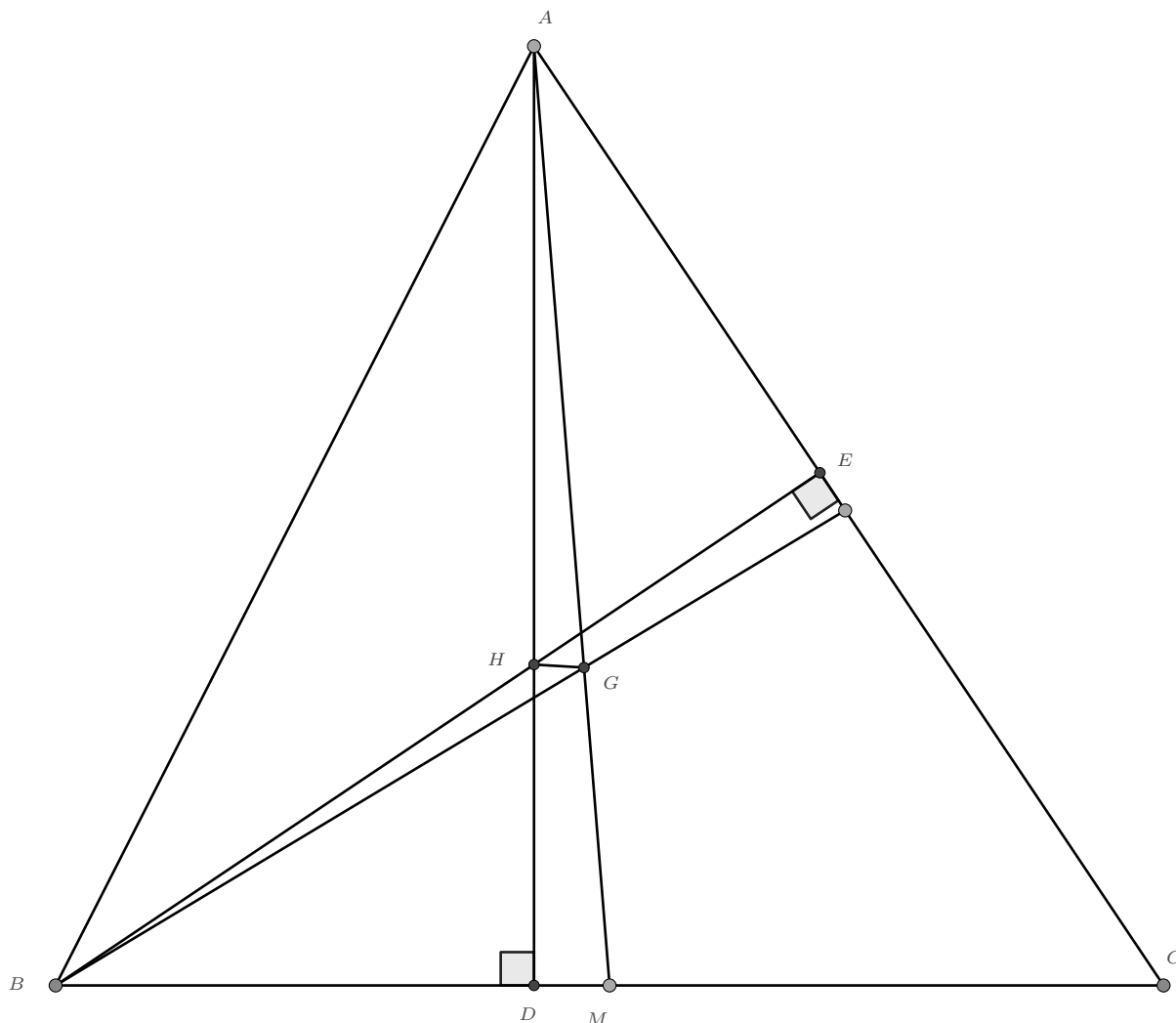
Thay $x=6$ vào (*) ta được $y=9$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x, y) = (6; 9)$.

Câu 4

Cho tam giác nhọn ABC có H, G lần lượt là trực tâm, trọng tâm và HG song song với BC . Tính $\tan B \cdot \tan C$.

Lời giải



Vì G là trọng tâm $\triangle ABC$ nên $AM = 3GM$.

Vì $HG \parallel BC$, áp dụng định lý Thales vào $\triangle ADM$ có: $\frac{AD}{HD} = \frac{AM}{GM} = 3$

$$\text{Ta có: } \left. \begin{array}{l} \widehat{HBC} + \widehat{BHD} = 90^\circ \\ \widehat{HBC} + \widehat{ACB} = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{BHD} = \widehat{ACB} \Rightarrow \tan \widehat{ACB} = \tan \widehat{BHD} = \frac{BD}{HD}.$$

Lại có: $\tan \widehat{ABC} = \frac{AD}{BD}$

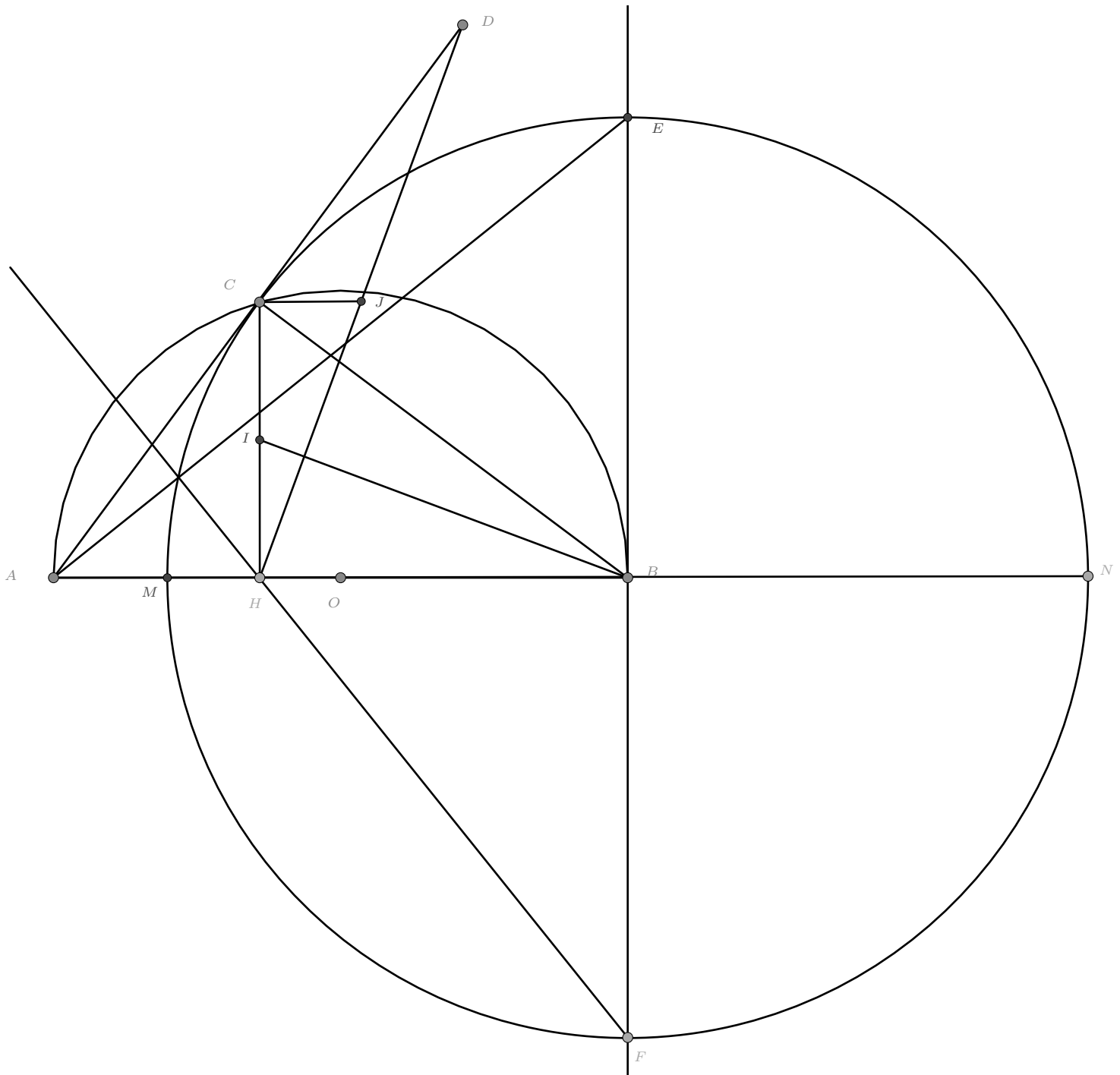
Từ đó, ta có: $\tan \widehat{ABC} \cdot \tan \widehat{ACB} = \frac{AD}{HD} = 3$

Câu 5

Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB . Lấy điểm H cố định thuộc đoạn thẳng OA (H không trùng với O và A). Đường thẳng vuông góc với AB tại H cắt nửa đường tròn tâm O tại C . Gọi D là điểm đối xứng với A qua C ; I, J lần lượt là trung điểm của CH và DH .

- a) Chứng minh hai tam giác CHJ và HBI đồng dạng.
- b) Gọi Bx là tia tiếp tuyến của nửa đường tròn tâm O . Lấy điểm E di động trên Bx (E không trùng với B). Đường thẳng qua H vuông góc với AE cắt đường thẳng BE tại F . Chứng minh đường tròn đường kính EF luôn đi qua hai điểm cố định khi E di động trên tia Bx .

Lời giải



a) Vì D là điểm đối xứng với A qua C nên $CA = CD$.

Xét $\triangle DAH$ có:

$$\left. \begin{array}{l} AC = CD \\ DJ = JH \end{array} \right\} \Rightarrow CJ \text{ là đường trung bình của } \triangle DAH$$

$$\Rightarrow CJ \parallel AH \text{ và } CJ = \frac{1}{2}AH$$

Mà $AH \perp CH$ nên $CJ \perp CH \Rightarrow \widehat{HCJ} = 90^\circ$

Vì $\widehat{ACB}$ nội tiếp chắn nửa đường tròn nên $\widehat{ACB} = 90^\circ$.

Áp dụng hệ thức cạnh và đường cao vào $\triangle ACB$ vuông tại C có $CH \perp AB$: $CH^2 = AH \cdot HB$

$$\Rightarrow \frac{CH}{AH} = \frac{HB}{CH}$$

$$\text{Mà } AH = 2CJ, HB = 2HI \text{ nên } \frac{CH}{CJ} = \frac{HB}{HI}.$$

Xét $\triangle CHJ$ và $\triangle HBI$ ta có:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{HCJ} = \widehat{BHI} = 90^\circ \\ \frac{CH}{CJ} = \frac{HB}{HI} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle CHJ \sim \triangle HBI \text{ (cạnh - góc - cạnh)}$$

b) Gọi Q là giao điểm của HF và $AE \Rightarrow QF \perp QE$

Gọi M, N là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp $\triangle QEF$ với AB .

Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{AQM} + \widehat{MQE} = 180^\circ \\ \widehat{MQE} + \widehat{ANE} = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{MFE} + \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{MCE} = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{AQM} = \widehat{ANE}$$

$$\text{Xét } \triangle AQM \text{ và } \triangle ANE \text{ có: } \left. \begin{array}{l} \widehat{EAN} \text{ chung} \\ \widehat{AQM} = \widehat{ANE} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AQM \sim \triangle ANE \text{ (góc - góc)}$$

$$\Rightarrow \frac{AQ}{AN} = \frac{AM}{AE}$$

$$\Rightarrow AM \cdot AN = AQ \cdot AE$$

$$\text{Xét } \triangle AQH \text{ và } \triangle ABE \text{ có: } \left. \begin{array}{l} \widehat{EAB} \text{ chung} \\ \widehat{AQH} = \widehat{ABE} = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AQH \sim \triangle ABE \text{ (góc - góc)}$$

$$\Rightarrow \frac{AQ}{AB} = \frac{AH}{AE}$$

$$\Rightarrow AB \cdot AH = AQ \cdot AE = AM \cdot AN$$

Mà AB, AH cố định nên $AM \cdot AN$ cố định.

Vì $EF \perp MN$ tại B , EF là đường kính nên $BM = BN$

$$\Rightarrow AM \cdot AN = (AB - BM)(AB + BN) = AB^2 - BM^2$$

Vì $AM \cdot AN, AB$ cố định nên BM cố định

$\Rightarrow M$ cố định, kéo theo N cố định.

Câu 6

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = 12(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{4(ab + bc + ca)}{a^2 + b^2 + c^2} + 2024.$$

Lời giải

Ta có: $A = 12(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{4(ab + bc + ca)}{a^2 + b^2 + c^2} + 2024.$

$$A = 12(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{2(a + b + c)^2}{a^2 + b^2 + c^2} + 2022$$

$$A = 12(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{18}{a^2 + b^2 + c^2} + 2022$$

$$A = 2(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{18}{a^2 + b^2 + c^2} + 10(a^2 + b^2 + c^2)2022 \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có:

$$2(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{18}{a^2 + b^2 + c^2} \geq 2\sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2) \cdot \frac{18}{a^2 + b^2 + c^2}} = 12 \quad (2)$$

Lại có: $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a + b + c)^2}{3} = 3$ nên $10(a^2 + b^2 + c^2) \geq 30$. (3)

Từ (1), (2), (3) ta suy ra

$$A = 2(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{18}{a^2 + b^2 + c^2} + 10(a^2 + b^2 + c^2)2022 \geq 12 + 30 + 2022 = 2064$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{18}{a^2 + b^2 + c^2} \\ 3(a^2 + b^2 + c^2) = (a + b + c)^2 \\ a + b + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 1$$

Vậy $A_{\min} = 2064$ khi $a = b = c = 1$.

— HẾT —

Lời giải được thực hiện bởi Vũ Đức Huy 9A1 – THCS Trọng điểm Lê Hữu Trác, Mỹ Hào, Hưng Yên.