PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ VINH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi gồm có 01 trang)

KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI HỌC SINH GIỎI TỈNH LỚP 9 - NĂM HỌC 2023 - 2024

Môn thi: Toán

Thời gian làm bài: ***150 phút***

Câu 1. *(3,0 điểm)*

a) Tính giá trị biểu thức: $Q=\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}-\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{c}$ biết $ax^3=by^3=cz^3$ và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$.

b) Chứng minh rằng không thể tồn tại đa thức $P(x)$ bậc 2 với hệ số nguyên nhận $\sqrt[3]{3}$ làm nghiệm.

Câu 2. *(3,5 điểm)* Giải phương trình:

a) $3x^2-15x+8=2x\sqrt{3x+1}$.

b) $\sqrt{1+x^2}+\frac{1+x^2}{2x}=\frac{\left(1+x^2\right)^2}{2x\left(1-x^2\right)}$.

Câu 3. *(5,5 điểm)*

a) Chứng minh rằng $ab\left(a^2+b^2\right)\left(a^2-b^2\right)$ chia hết cho 30 với mọi số nguyên a, b.

b) Tìm các cặp số nguyên dương x, y thỏa mãn: $4x^2y^2-3x+3y$ là số chính phương và $x^{2024}=2024y^{2023}$.

c) Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $0\le a,b,c\le\frac{1}{2}$ và $a+b+c=1$. Chứng minh rằng: $a^3+b^3+c^3+4abc\le\frac{9}{32}$

Câu 4. *(7,0 điểm)* Cho tam giác ABC nhọn (AB < AC), đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC, tiếp xúc với ba cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Đường thẳng EF cắt AI tại J và cắt đường thẳng BC tại S.

a) Chứng minh: Tam giác IDA đồng dạng với tam giác IJD.

b) Gọi T là giao điểm của ID và EF. Chứng minh: TI.TD =TJ.TS và IS vuông góc với AD.

c) Qua E kẻ đường thẳng song song với BC cắt AD, DF tại M, N. Chứng minh M là trung điểm của EN.

Câu 5. *(1,0 điểm)* Trong mặt phẳng kẻ 2022 đường thẳng phân biệt sao cho không có hai đường thẳng nào song song và không có ba đường thẳng nào đồng quy. Tam giác tạo bởi ba đường thẳng trong số các đường thẳng đã cho tạo thành tam giác đẹp nếu nó không bị đường thẳng nào trong số các đường thẳng còn lại cắt. Chứng minh rằng số tam giác đẹp không ít hơn 674.

……………………. Hết …………………