

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề có 01 trang, gồm 05 câu)

Câu 1: (4,0 điểm).

1. Cho a, b, c là các số hữu tỷ thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng giá trị biểu thức $Q = (a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)$ là bình phương của một số hữu tỷ.

2. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn: $x + y + z = 1$ và $x^3 + y^3 + z^3 = 1$. Tính giá trị biểu thức: $A = x^{2023} + y^{2023} + z^{2023}$.

Câu 2: (4,0 điểm).

1. Tìm x , biết: $(x-1)(x-3)(x+5)(x+7) = 297$.

2. Cho đa thức: $f(x) = (x^2 + x + 1)^{2024} + (x^2 - x - 1)^{2024} + 2021$. Tìm số dư của phép chia $f(x)$ cho $x + 1$.

Câu 3: (4,0 điểm).

1. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $5x^2 + 2xy + y^2 - 4x - 40 = 0$.

2. Cho các số nguyên a, b, c thỏa mãn $2a + b, 2b + c, 2c + a$ đều là các số chính phương. Biết rằng một trong ba số chính phương trên chia hết cho 3. Chứng minh rằng: $P = (a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$ chia hết cho 81.

Câu 4: (6,0 điểm).

1. Cho hình chữ nhật ABCD có $\widehat{BDC} = 30^\circ$. Qua C vẽ đường thẳng vuông góc với BD, cắt BD ở E và cắt tia phân giác của $\widehat{ADB}$ ở M.

a. Chứng minh rằng tứ giác AMBD là hình thang cân.

b. Gọi N là hình chiếu của M trên DA, K là hình chiếu của M trên AB. Chứng minh rằng ba điểm N, K, E thẳng hàng.

2. Cho tam giác ABC. Gọi D là trung điểm của cạnh BC. Trên hai cạnh AB, AC lần lượt lấy hai điểm E, F. Chứng minh rằng: $S_{DEF} \leq \frac{1}{2} S_{ABC}$.

Câu 5: (2,0 điểm).

Cho a, b, c là những số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2b}{ab^2+1} + \frac{b^2c}{bc^2+1} + \frac{c^2a}{ca^2+1} \geq \frac{3abc}{1+abc}.$$

----- Hết -----

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Giám thị coi thi không giải thích gì thêm