

(Đề thi này có 01 trang)

Câu 1. (4 điểm)

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn: $x^2 - y^2 + 2(3x + y) = 29$.

b) Đội văn nghệ của lớp 9A có 3 bạn nam và 4 bạn nữ. Cô giáo phụ trách đội chọn ngẫu nhiên hai bạn để hát song ca. Tính xác suất của biến cố T: “Trong hai bạn được chọn ra có một bạn nam và một bạn nữ”.

Câu 2. (4 điểm)

a) Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{1 - \sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{1 + \sqrt{xy}} + \frac{x + y + 2xy}{1 - xy}$, với $(x \neq 0; y \neq 0; xy \neq 1)$.

a1. Rút gọn biểu thức P.

a2. Tính giá trị của P khi $x = \sqrt{1 + 2025^2 + \frac{2025^2}{2024^2}} - \frac{2024^2 + 1}{2024}$ và $y = 22 \frac{12}{2024}$.

b) Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng: $1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$

Câu 3. (4 điểm)

a) Anh Bình cần rút tiền trong thẻ ATM để chi tiêu cá nhân nhưng lại quên mật khẩu đăng nhập tài khoản. Biết rằng mật khẩu là một số chính phương A có bốn chữ số, nếu bớt đi mỗi chữ số của số A một đơn vị thì được số mới là số chính phương có bốn chữ số. Em hãy giúp anh Bình tìm lại mật khẩu đã quên.

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} xy(x+y) = 2 \\ x^3 + y^3 + 6 = 8x^2y^2 \end{cases}$$

Câu 4. (5 điểm) Cho đường tròn $(O; R)$ có đường kính AB, C là trung điểm của OA và dây MN vuông góc với OA tại C. Gọi K là điểm tùy ý trên cung nhỏ BM, H là giao điểm của AK, MN.

a) Chứng minh: BCHK là tứ giác nội tiếp.

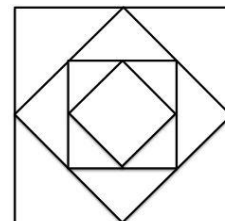
b) Tính AH.AK theo R.

c) Xác định vị trí điểm K để $KM + KN + KB$ lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất đó.

Câu 5. (3 điểm)

a) Cho tam giác ABC cân tại A, có góc A nhỏ hơn 90° . Từ B kẻ BM vuông góc với AC tại M (điểm M thuộc AC). Chứng minh rằng $\frac{AM}{MC} + 1 = 2 \frac{AB^2}{BC^2}$

b) Tính diện tích của hình vuông lớn nhất, biết diện tích hình vuông bé nhất là 124 cm^2 (hình bên).



--- Hết ---

(Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm)

HƯỚNG DẪN CHẤM

Dưới đây là chi tiết biểu điểm của đề thi HSG môn Toán 9. Các Giám khảo thảo luận thống nhất thêm chi tiết lời giải cũng như thang điểm của biểu điểm đã trình bày (nếu có).

Nội dung thảo luận và đã thống nhất khi chấm được ghi vào biên bản cụ thể để việc chấm phúc khảo sau này được thống nhất và chính xác.

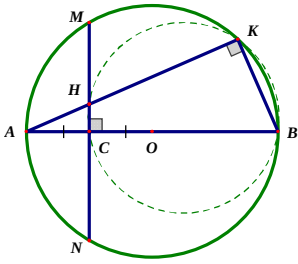
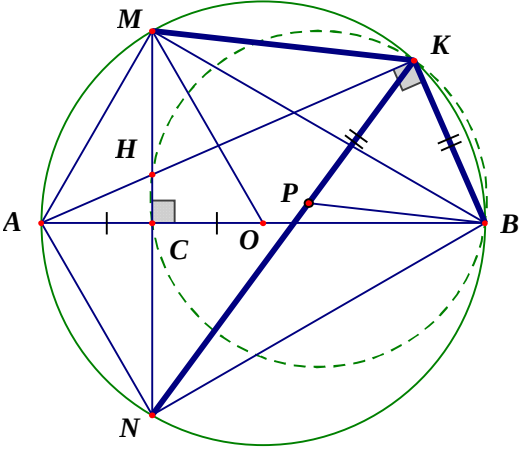
Học sinh có lời giải khác đúng, chính xác thì bài làm đúng đến ý nào giám khảo cho điểm ý đó.

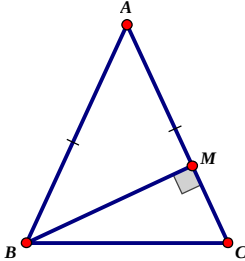
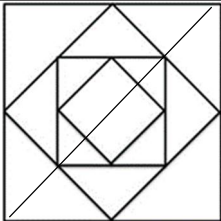
Việc làm tròn số điểm bài kiểm tra được thực hiện theo quy định của Bộ Giáo dục và Đào tạo.

Câu	Đáp án	Điểm																				
1a)	Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn: $x^2 - y^2 + 2(3x + y) = 29$.	2,0																				
	Ta có: $x^2 - y^2 + 2(3x + y) = 29$. $(x^2 + 6x + 9) - (y^2 - 2y + 1) - 8 = 29 \Leftrightarrow (x + 3)^2 - (y - 1)^2 = 37$ $(x - y + 4)(x + y + 2) = 37$ (Vì $37 = 1.37 = (-1).(-37)$)	0,5																				
	Ta có bảng <table><tr><td>$x - y + 4$</td><td>1</td><td>37</td><td>- 1</td><td>- 37</td></tr><tr><td>$x + y + 2$</td><td>37</td><td>1</td><td>- 37</td><td>- 1</td></tr><tr><td>x</td><td>16</td><td>16</td><td>- 22</td><td>- 22</td></tr><tr><td>y</td><td>19</td><td>- 17</td><td>- 17</td><td>19</td></tr></table>	$x - y + 4$	1	37	- 1	- 37	$x + y + 2$	37	1	- 37	- 1	x	16	16	- 22	- 22	y	19	- 17	- 17	19	1,0
$x - y + 4$	1	37	- 1	- 37																		
$x + y + 2$	37	1	- 37	- 1																		
x	16	16	- 22	- 22																		
y	19	- 17	- 17	19																		
	Vậy phương trình có các nghiệm nguyên $(x; y)$ là $(16; 19), (16; - 17), (- 22; - 17), (- 22; 19)$.	0,5																				
1b)	Đội văn nghệ của lớp 9A có 3 bạn nam và 4 bạn nữ. Cô giáo phụ trách đội chọn ngẫu nhiên hai bạn để hát song ca. Tính xác suất của biến cố T: “Trong hai bạn được chọn ra có một bạn nam và một bạn nữ”.	2,0																				
	Gọi 3 bạn nam lần lượt là 1, 2, 3 Gọi 4 bạn nữ lần lượt là a, b, c, d Kết quả có thể của phép thử là cặp (X, Y) sao cho $X \neq Y$. Vì chọn đồng thời 2 bạn nên loại trừ các trường hợp trùng nhau. Ta có $W = \{(1, 2); (1, 3); (1, a); (1, b); (1, c); (1, d); (2, 3); (2, a); (2, b); (2, c); (2, d); (3, a); (3, b); (3, c); (3, d); (a, b); (a, c); (a, d); (b, c); (b, d); (c, d)\}$ Tập W có 21 phần tử	1,0																				
	Vì chọn ngẫu nhiên nên các kết quả có thể là đồng khả năng. Có 12 kết quả thuận lợi cho biến cố T: “Trong hai bạn được chọn ra có một bạn nam và một bạn nữ” là: $\{(1, a); (1, b); (1, c); (1, d); (2, a); (2, b); (2, c); (2, d); (3, a); (3, b); (3, c); (3, d)\}$ nên xác suất biến cố T là: $P(T) = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$	1,0																				

Câu	Đáp án	Điểm
2	Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{1 - \sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{1 + \sqrt{xy}} + \frac{x + y + 2xy}{1 - xy}$ ($x \geq 0; y \geq 0; xy \neq 1$).	4,0
a1.	Rút gọn biểu thức P.	1,0
	Với ($x \geq 0; y \geq 0; xy \neq 1$). Ta có $P = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(1 + \sqrt{xy}) + (\sqrt{x} - \sqrt{y})(1 - \sqrt{xy})}{1 - xy} \cdot \frac{1 - xy + x + y + 2xy}{1 - xy}$	0,25
	$= \frac{\sqrt{x} + x\sqrt{y} + \sqrt{y} + y\sqrt{x} + \sqrt{x} - x\sqrt{y} - \sqrt{y} + y\sqrt{x}}{1 - xy} \cdot \frac{1 - xy}{1 + x + y + xy}$	0,25
	$= \frac{2(\sqrt{x} + y\sqrt{x})}{(1 + x)(1 + y)}$	0,25
	$= \frac{2\sqrt{x}(1 + y)}{(1 + x)(1 + y)} = \frac{2\sqrt{x}}{1 + x}$	0,25
a2.	Tính giá trị của P khi $x = \sqrt{1 + 2025^2 + \frac{2025^2}{2024^2}} - \frac{2024^2 + 1}{2024}$; $y = 22 \frac{12}{2024}$.	1,0
	Khi $x = \sqrt{1 + 2025^2 + \frac{2025^2}{2024^2}} - \frac{2024^2 + 1}{2024}$ Ta có: $2024^2 = (2025 - 1)^2 = 2025^2 - 2 \cdot 2025 + 1$ $2025^2 + 1 = 2024^2 + 2 \cdot 2025$	0,25
	$P = \frac{2\sqrt{x}}{1 + x} = \frac{2\sqrt{1 + 2025^2 + \frac{2025^2}{2024^2}} - \frac{2024^2 + 1}{2024}}{1 + \sqrt{1 + 2025^2 + \frac{2025^2}{2024^2}} - \frac{2024^2 + 1}{2024}}$ $= \frac{2\sqrt{2024^2 + 2 \cdot 2025 + \frac{2025^2}{2024^2}} - \frac{2024^2 + 1}{2024}}{2024 + \frac{2025}{2024} - \frac{2024^2 + 1}{2024}} = \frac{2024^2 + 2025 - 2024^2 - 1}{2024} = 1$	0,5
	Vậy $P = \frac{2\sqrt{x}}{1 + x} = \frac{2\sqrt{1}}{1 + 1} = 1$	0,25
2b)	Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng: $1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$	2,0
	Vì a, b, c là các số dương nên ta có: $\frac{a}{a+b+c} < \frac{a}{a+b} < \frac{a+c}{a+b+c} \quad (1)$	0,5
	$\frac{b}{a+b+c} < \frac{b}{b+c} < \frac{b+a}{b+c+a} \quad (2)$	0,5

Câu	Đáp án	Điểm
	$\frac{c}{a+b+c} < \frac{c}{c+a} < \frac{c+b}{c+a+b} \quad (3)$	0,5
	Cộng từng vế (1), (2), (3) ta được $1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$ (đpcm)	0,5
3a)	Anh Bình cần rút tiền trong thẻ ATM để chi tiêu cá nhân nhưng lại quên mật khẩu đăng nhập tài khoản. Biết rằng mật khẩu là một số chính phương A có bốn chữ số, nếu bớt đi mỗi chữ số của số A một đơn vị thì được số mới là số chính phương có bốn chữ số. Em hãy giúp anh Bình tìm lại mật khẩu đã quên.	2,0
	Gọi mật khẩu đăng nhập của anh Bình là $\overline{abcd}$ Điều kiện: $(a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$ và $a, b, c, d \in 9$ và $a \geq 2$)	0,25
	Theo đề bài ta có: $\overline{abcd} = x^2$ và $\overline{(a-1)(b-1)(c-1)(d-1)} = y^2$ với $(x, y \in \mathbb{N}^*; 32 \leq x, y \leq 99)$	0,5
	Do đó: $x^2 - y^2 = 1111$ hay $(x-y)(x+y) = 1.111 = 11.101$	0,5
	Vì $32 \leq x, y \leq 99$ nên $x+y \geq 1111$ và $x+y \leq 1$	
	Vậy nên không xảy ra các trường hợp $\begin{cases} x+y=1111 \\ x-y=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=1111 \end{cases}$	0,25
	Mặt khác: $x+y > x-y$ (do x, y là các số nguyên dương) nên chỉ xảy ra trường hợp: $\begin{cases} x+y=101 \\ x-y=11 \end{cases} \cup \begin{cases} x=56 \\ y=45 \end{cases}$ (nhận)	0,25
	Vậy: mật khẩu đăng nhập của anh Bình là $56^2 = 3136$	0,25
3b)	Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy(x+y)=2 \\ x^3+y^3+6=8x^2y^2 \end{cases}$	2,0
	Hệ phương trình trở thành: $\begin{cases} xy(x+y)=2 \\ (x+y)^3 - 3xy(x+y) + 6 = 8x^2y^2 \end{cases}$	0,25
	$\cup \begin{cases} xy(x+y)=2 \\ (x+y)^3 = 8x^2y^2 \end{cases}$	0,25
	Dễ thấy $xy \neq 0$ nên: $x+y = \frac{2}{xy}$.	0,25
	Từ đây thu được $\frac{8}{x^3y^3} = 8x^2y^2 \cup xy = 1$.	0,25
	Khi đó $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=1 \end{cases} \cup \begin{cases} y=2-x \\ x(2-x)=1 \end{cases}$	0,25
	$\cup \begin{cases} y=2-x \\ x^2-2x+1=0 \end{cases} \cup \begin{cases} y=x-2 \\ (x-1)^2=0 \end{cases}$	0,25
	$\cup \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$	0,25
	Vậy tập hợp nghiệm của hệ phương trình là $S = \{(1;1)\}$.	0,25

Câu	Đáp án	Điểm
4.	Cho đường tròn (O;R) có đường kính AB, C là trung điểm của OA và dây MN vuông góc với OA tại C. Gọi K là điểm tùy ý trên cung nhỏ BM, H là giao điểm của AK, MN.	5,0
		0,25
4a)	Chứng minh: $BCHK$ là tứ giác nội tiếp.	1,5
	Do K nằm trên đường tròn tâm O đường kính AB nên $\angle AKB = 90^\circ$	0,25
	Hay $\angle HKB = 90^\circ$, 3 điểm A, K, B cùng thuộc một đường tròn đường kính HB (1)	0,5
	Lại có $\angle HCB = 90^\circ$ (giả thiết)	0,25
	Hay 3 điểm H, C, B cùng thuộc một đường tròn đường kính HB (1)	0,25
	Vậy tứ giác $BCHK$ nội tiếp đường tròn đường kính HB	0,25
4b)	Tính $AH.AK$ theo R .	1,5
	Ta có $\triangle DACH : \triangle DAKB (g.g)$ nên $\frac{AH}{AC} = \frac{AB}{AK}$	0,5
	suy ra $AH.AK = AB.AC$	0,5
	Hay $AH.AK = 2R \cdot \frac{R}{2} = R^2$	0,5
4c)	Xác định vị trí K để $KM + KN + KB$ lớn nhất. Tính GTLN đó.	1,5
		0,25
	Nhận thấy đường kính AB vuông góc với dây MN nên đi qua trung điểm của dây MN. Suy ra: Tam giác BMN cân tại M (1) Mặt khác, tam giác AMO đều (do AMO cân tại O và tại M). Suy ra $\angle MBN = 60^\circ$ (2) Từ (1) và (2) suy ra tam giác BMN đều	0,25

Câu	Đáp án	Điểm
	nên $\widehat{NKB} = \frac{1}{2} \widehat{N} = 60^\circ$. Trên dây KN lấy điểm P sao cho $KP = KB$ thì tam giác KPB đều.	0,25
	Xét tam giác MKB và NPB ta có: $KB = BP$, $MB = NB$, $\widehat{MKB} = \widehat{NPB} = 120^\circ$ suy ra $\triangle MKB = \triangle NPB$ (c.g.c)	0,25
	$\Rightarrow KM = PN \Rightarrow KM + KB = KN$. Vậy $KM + KN + KB = 2KN$.	0,25
	Dễ thấy $KN \leq 2R$ nên $KM + KN + KB \leq 4R$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi K, O, N thẳng hàng.	0,25
	Từ đó suy ra điểm K là giao điểm của NO với (O) (K khác N).	0,25
5a.	Cho tam giác ABC cân tại A, có góc A nhỏ hơn 90°. Từ B kẻ BM vuông góc với AC tại M (điểm M thuộc AC). Chứng minh rằng $\frac{AM}{MC} + 1 = 2 \frac{AB^2}{BC^2}$	2,0
		
	Tam giác ABC cân tại A nên $AB = AC$	0,25
	Ta có: $\frac{AM}{MC} + 1 = 2 \frac{AB^2}{BC^2}$ Suy ra $\frac{AM + MC}{MC} = 2 \frac{AC^2}{BC^2}$ $\Rightarrow \frac{AC}{MC} = 2 \frac{AC^2}{BC^2}$ $\Rightarrow BC^2 = 2AC.MC$	0,25
	Như vậy ta chỉ cần chứng minh $BC^2 = 2AC.MC$	0,25
	Thật vậy, ta có: $BC^2 = BM^2 + MC^2 = (AB^2 - AM^2) + (AC - AM)^2$	0,25
	$BC^2 = (AB^2 - AM^2) + (AC - AM)^2$	0,25
	$BC^2 = AC^2 - AM^2 + AC^2 - 2AC.AM + AM^2$	0,25
	$BC^2 = 2AC^2 - 2AC.AM$	0,25
	$BC^2 = 2AC(AC - AM) = 2AC.MC \text{ (đpcm)}$	0,25
5b.	Tính diện tích của hình vuông lớn nhất, biết diện tích hình vuông bé nhất là 124 cm^2.	1,0
		

Câu	Đáp án	Điểm
	Độ dài cạnh hình vuông bé nhất là $\sqrt{124} = 2\sqrt{31}$ cm	0,25
	Theo tính chất đường trung bình của tam giác, dễ thấy đường chéo của hình vuông lớn nhất gấp 4 lần cạnh hình vuông bé nhất.	0,25
	Vậy Diện tích của hình vuông lớn nhất là $\frac{1}{2} \cdot (4.2\sqrt{31})(4.2\sqrt{31}) = 992 \text{ cm}^2$	0,5

--- Hết ---