

ĐỀ CHÍNH THỨC

Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Ngày thi 16/03/2021

(Đề thi gồm 01 trang, 05 câu)

Câu 1 (4,0 điểm). Cho biểu thức $P = \left(\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{3x+2\sqrt{x}} - \frac{9x+\sqrt{x}+1}{3x-\sqrt{x}-2} \right) : \frac{3\sqrt{x}+1}{7x-7\sqrt{x}},$

$(x > 0, x \neq 1).$

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm x sao cho P nhận giá trị là một số nguyên.

Câu 2 (6,0 điểm).

a) Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + 2m - 5 = 0$, (x là ẩn, m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| = 2\sqrt{2}$.

b) Lúc 7 giờ sáng một người đi xe đạp từ địa điểm A đến địa điểm B với khoảng cách là 18 km. Sau khi đi được $\frac{1}{3}$ quãng đường do xe bị hỏng nên người đó phải dừng lại sửa mất 20 phút rồi đi tiếp trên đoạn đường còn lại với vận tốc kém vận tốc lúc đầu là 8 km/h. Khi đến B người đó nghỉ lại 30 phút rồi trở về A với vận tốc bằng một nửa vận tốc đi trên $\frac{1}{3}$ quãng đường AB đầu tiên. Biết người đó trở về A lúc 10 giờ 20 phút sáng cùng ngày. Hỏi xe đạp hỏng lúc mấy giờ?

c) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x+1)^2 + y^2 = xy + y + 1 \\ 2y^3 = x + y + 1. \end{cases}$$

Câu 3 (6,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn có $AB < AC$. Gọi D là trung điểm của BC . Hai đường cao BE và CF cắt nhau tại H . Đường tròn tâm O ngoại tiếp $\triangle BDF$ và đường tròn tâm O' ngoại tiếp $\triangle CDE$ cắt nhau tại I (I khác D), EF cắt BC tại K . Chứng minh

a) Tứ giác $AEIF$ nội tiếp.

b) Tam giác DCA đồng dạng với tam giác DIC .

c) Ba đường thẳng BE, CF, KI đồng quy.

Câu 4 (2 điểm). Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa mãn: $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

biểu thức $P = \frac{a^2b^2}{c(a^2+b^2)} + \frac{b^2c^2}{a(b^2+c^2)} + \frac{a^2c^2}{b(a^2+c^2)}.$

Câu 5 (2,0 điểm). Giải phương trình nghiệm nguyên: $y^4 + 2y^3 - y^2 - 2y - x^2 - x = 0.$

-----HẾT-----

Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay!

Chữ ký của giám thị số 1:.....

Chữ ký của giám thị số 2:.....

I. Hướng dẫn chung

1. Nếu thí sinh giải theo cách khác mà đúng thì cho điểm tối đa câu đó.
2. Nếu thí sinh giải theo cách khác nhưng chưa hoàn thiện lời giải thì giám khảo chỉ cho điểm những ý làm được nếu chỉ ra được lời giải hoàn thiện theo hướng làm đó.
3. Bài hình học không vẽ hình hoặc vẽ sai hình (theo từng ý) thì không chấm điểm.
4. Trong một bài toán nếu có nhiều ý mà các ý có liên quan đến nhau, nếu thí sinh không làm được ý trước thì không được sử dụng kết quả của ý đó để làm ý sau.

II. Hướng dẫn chấm chi tiết

Câu 1 (4,0 điểm). Cho biểu thức $P = \left(\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{3x+2\sqrt{x}} - \frac{9x+\sqrt{x}+1}{3x-\sqrt{x}-2} \right) : \frac{3\sqrt{x}+1}{7x-7\sqrt{x}}$,
 $(x > 0, x \neq 1)$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm x sao cho P nhận giá trị là một số nguyên.

Ý	Nội dung	Điểm
a)	$P = \left(\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{3\sqrt{x}+2} - \frac{9x+\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(3\sqrt{x}+2)} \right) : \frac{3\sqrt{x}+1}{7x-7\sqrt{x}}$	0,5
	$= \frac{3\sqrt{x}(3\sqrt{x}+2) - 2(\sqrt{x}-1) - 9x - \sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x}-1)(3\sqrt{x}+2)} \cdot \frac{7\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{3\sqrt{x}+1}$	0,5
	$= \frac{3\sqrt{x}+1}{3\sqrt{x}+2} \cdot \frac{7\sqrt{x}}{3\sqrt{x}+1}$	0,5
	$= \frac{7\sqrt{x}}{3\sqrt{x}+2}$	0,5
b)	$\forall x > 0, x \neq 1 \Rightarrow \sqrt{x} > 0 \Rightarrow P = \frac{7\sqrt{x}}{3\sqrt{x}+2} > 0$	0,5

	$P = \frac{7\sqrt{x}}{3\sqrt{x} + 2} = \frac{7}{3} - \frac{14}{3(3\sqrt{x} + 2)} < \frac{7}{3}$ $\Rightarrow 0 < P < \frac{7}{3}, \forall x > 0, x \neq 1$	0,5
	P nhận giá trị là một số nguyên $\Rightarrow P \in \{1; 2\}$	0,5
	$P = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$ (tmđk) $P = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow x = 16$ (tmđk) Vậy $x \in \left\{\frac{1}{4}; 16\right\}$ thì P nhận giá trị là một số nguyên.	0,5

Câu 2 (6,0 điểm).

a) Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + 2m - 5 = 0$, (x là ẩn, m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| = 2\sqrt{2}$.

b) Lúc 7 giờ sáng một người đi xe đạp từ địa điểm A đến địa điểm B với khoảng cách là 18 km. Sau khi đi được $\frac{1}{3}$ quãng đường do xe bị hỏng nên người đó phải dừng lại sửa mất 20 phút rồi đi tiếp trên đoạn đường còn lại với vận tốc kém vận tốc lúc đầu là 8 km/h. Khi đến B người đó nghỉ lại 30 phút rồi trở về A với vận tốc bằng một nửa vận tốc đi trên $\frac{1}{3}$ quãng đường AB đầu tiên. Biết người đó trở về A lúc 10 giờ 20 phút sáng cùng ngày. Hỏi xe đạp hỏng lúc mấy giờ?

c) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x+1)^2 + y^2 = xy + y + 1 \\ 2y^3 = x + y + 1. \end{cases}$$

Ý	Nội dung	Điểm
a)	Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + 2m - 5 = 0$, (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $ x_1 - x_2 = 2\sqrt{2}$.	
	$\Delta' = (m-2)^2 + 2 > 0, \forall m$ $\Rightarrow$ Phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2, \forall m$.	0,5
	Áp dụng Vi-ét: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1 x_2 = 2m - 5 \end{cases}$	0,25

	$ x_1 - x_2 = 2\sqrt{2}$ $\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 8$ $\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 8$	0,5
	$\Leftrightarrow m^2 - 4m + 4 = 0$ $\Leftrightarrow m = 2$	0,75
b)	b) Lúc 7 giờ sáng một người đi xe đạp từ địa điểm A đến địa điểm B với khoảng cách là 18 km . Sau khi đi được $\frac{1}{3}$ quãng đường do xe bị hỏng nên người đó phải dừng lại sửa mất 20 phút rồi đi tiếp trên đoạn đường còn lại với vận tốc kém vận tốc lúc đầu là 8 km/h . Khi đến B người đó nghỉ lại 30 phút rồi trở về A với vận tốc bằng một nửa vận tốc đi trên $\frac{1}{3}$ quãng đường AB đầu tiên. Biết người đó trở về A lúc 10 giờ 20 phút sáng cùng ngày. Hỏi xe đạp hỏng lúc mấy giờ?	
	Đổi 20 phút = $\frac{1}{3}(h)$; 30 phút = $\frac{1}{2}(h)$; 10 giờ 20 phút = $10\frac{1}{3}(h)$ Gọi vận tốc xe đạp đi trên $\frac{1}{3}$ quãng đường AB đầu tiên là $x \text{ (km/h)}$ ($x > 8$) Vận tốc xe đạp đi trên $\frac{2}{3}$ quãng đường còn lại là $x - 8 \text{ (km/h)}$ Vận tốc xe đạp đi từ B về A là $0,5x \text{ (km/h)}$.	0,5
	Tổng thời gian xe đi từ A đến B rồi quay về A là: $10\frac{1}{3} - 7 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}(h)$ Theo đề bài ta có phương trình $\frac{6}{x} + \frac{12}{x-8} + \frac{18}{0,5x} = \frac{5}{2}$	0,5
	$\Leftrightarrow 5x^2 - 148x + 672 = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 24 \\ x = \frac{28}{5} \end{cases}$ Kết hợp với điều kiện được: $x = 24 \text{ (km/h)}$	0,5
	Thời gian xe đi $\frac{1}{3}$ quãng đường AB đầu tiên là $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}(h)$ Vậy xe đạp hỏng lúc 7 giờ 15 phút.	0,5

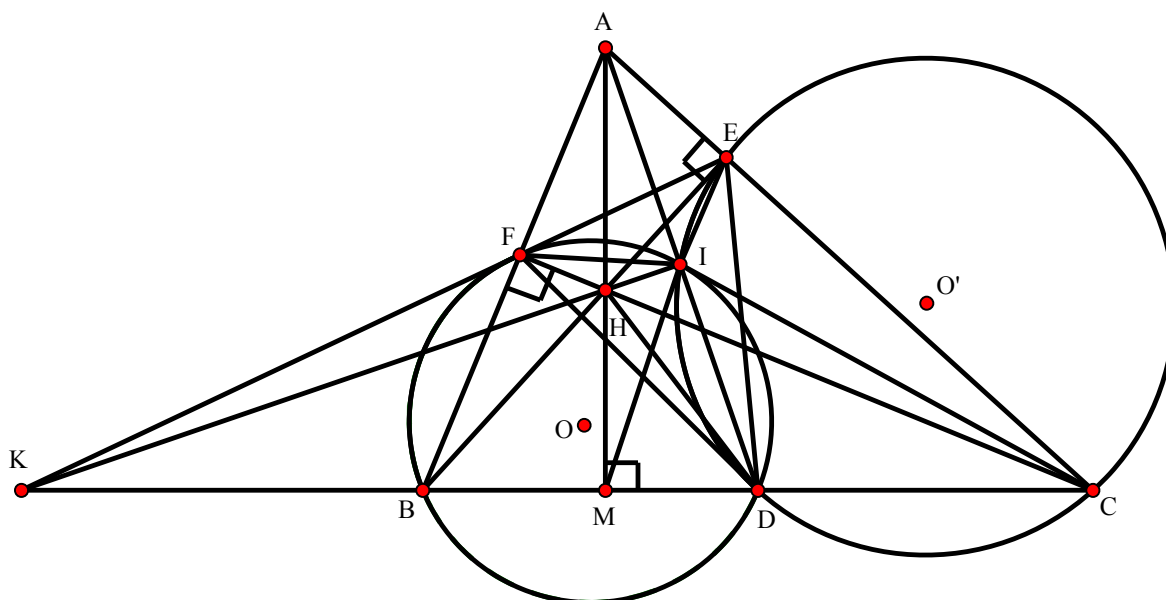
c) Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x+1)^2 + y^2 = xy + y + 1 \\ 2y^3 = x + y + 1. \end{cases}$		
c)	Hệ phương trình đã cho tương đương: $\begin{cases} (x+1)^2 - (x+1)y + y^2 = 1 & (1) \\ (x+1) + y = 2y^3 & (2) \end{cases}$ Nhân vế với vế của (1) và (2) được $(x+1)^3 + y^3 = 2y^3$	0,5
	$\Leftrightarrow (x+1)^3 = y^3$ $\Leftrightarrow x+1 = y. \text{ Thế vào phương trình (1) được}$	0,5
	$y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm 1$	0,5
	Với $y = 1 \Rightarrow x = 0$ Với $y = -1 \Rightarrow x = -2$ Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) \in \{(0; 1), (-2; -1)\}$.	0,5

Câu 3 (6,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn có $AB < AC$. Gọi D là trung điểm của BC . Hai đường cao BE và CF cắt nhau tại H . Đường tròn tâm O ngoại tiếp $\triangle BDF$ và đường tròn tâm O' ngoại tiếp $\triangle CDE$ cắt nhau tại I (I khác D), EF cắt BC tại K . Chứng minh

a) Tứ giác $AEIF$ nội tiếp.

b) Tam giác DCA đồng dạng với tam giác DIC .

c) Ba đường thẳng BE, CF, KI đồng quy.



Ý	Nội dung	Điểm
a)	a) Tứ giác $AEIF$ nội tiếp.	
	$\widehat{IDC} + \widehat{IEC} = 180^\circ$ (tứ giác $CDIE$ nội tiếp)	0,5
	$\widehat{IDC} + \widehat{IDB} = 180^\circ$ (hai góc kề bù) $\widehat{IDB} + \widehat{IFB} = 180^\circ$ (tứ giác $BDIF$ nội tiếp)	0,5
	$\Rightarrow \widehat{IEC} + \widehat{IFB} = 180^\circ$	0,5
	$\Rightarrow \widehat{AEI} + \widehat{AFI} = 180^\circ$ $\Rightarrow$ Tứ giác $AEIF$ nội tiếp.	0,5
b)	b) Tam giác DCA đồng dạng với tam giác DIC .	
	Ta có: $\widehat{AIF} = \widehat{AEF}$ (tứ giác $AEIF$ nội tiếp) $\widehat{ABC} = \widehat{AEF}$ (tứ giác $BCEF$ nội tiếp) $\widehat{ABC} + \widehat{FID} = 180^\circ$ (tứ giác $BDIF$ nội tiếp)	0,5
	$\Rightarrow \widehat{AIF} + \widehat{FID} = 180^\circ$ $\Rightarrow$ Ba điểm A, I, D thẳng hàng.	0,5
	$\triangle BEC$ vuông tại E, D là trung điểm của $BC \Rightarrow DB = DC = DE$. $\Rightarrow \widehat{DEC} = \widehat{DCE}$ ($\triangle CDE$ cân tại D).	0,5
	Mà $\widehat{DEC} = \widehat{DIC}$ (tứ giác $CDIE$ nội tiếp) $\Rightarrow \widehat{DCE} = \widehat{DIC}$	0,5

	$\triangle DCA$ và $\triangle DIC$ có $\widehat{ADC}$ chung và $\widehat{DCE} = \widehat{DIC}$ $\Rightarrow \triangle DCA \sim \triangle DIC$ (g.g)	
c)	c) Ba đường thẳng BE, CF, KI đồng quy.	
	Ta có: $\triangle DCA \sim \triangle DIC \Rightarrow \widehat{DCI} = \widehat{DAC}$ Mặt khác: $\widehat{DAC} = \widehat{IFE}$ (tứ giác $AEIF$ nội tiếp) $\Rightarrow \widehat{DCI} = \widehat{IFE}$ $\Rightarrow$ tứ giác $CIFK$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{KFC} = \widehat{KIC}$	0,5
	$\widehat{KFB} = \widehat{ACD}$ (tứ giác $BCEF$ nội tiếp) $\Rightarrow \widehat{KFB} = \widehat{CID}$ ($= \widehat{ACD}$) $\Rightarrow \widehat{KID} = \widehat{BFC} = 90^\circ$ $\Rightarrow KI \perp AD$ (1)	0,5
	Tứ giác $AEHF$ nội tiếp đường tròn đường kính AH Tứ giác $AEIF$ nội tiếp $\Rightarrow I$ thuộc đường tròn đường kính AH $\Rightarrow HI \perp AD$ (2)	0,5
	Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ ba điểm K, H, I thẳng hàng Vậy ba đường thẳng BE, CF, KI đồng quy tại H .	0,5

Câu 4 (2 điểm). Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa mãn: $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 1$. Tìm giá trị nhỏ

nhất của biểu thức: $P = \frac{a^2 b^2}{c(a^2 + b^2)} + \frac{b^2 c^2}{a(b^2 + c^2)} + \frac{a^2 c^2}{b(a^2 + c^2)}$.

Ý	Nội dung	Điểm
	$P = \frac{1}{c\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2}\right)} + \frac{1}{a\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2}\right)} + \frac{1}{b\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right)}$ Đặt $x = \frac{1}{a}$; $y = \frac{1}{b}$; $z = \frac{1}{c}$ thì $x, y, z > 0$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.	0,5
	$P = \frac{z}{x^2 + y^2} + \frac{x}{y^2 + z^2} + \frac{y}{z^2 + x^2} = \frac{z^2}{z(1 - z^2)} + \frac{x^2}{x(1 - x^2)} + \frac{y^2}{y(1 - y^2)}$ Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 3 số dương ta có	0,5

$x^2(1-x^2)^2 = \frac{1}{2} \cdot 2x^2(1-x^2)(1-x^2) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2x^2 + 1 - x^2 + 1 - x^2}{3} \right)^3$ $\Leftrightarrow x^2(1-x^2)^2 \leq \frac{4}{27}$ $\Leftrightarrow x(1-x^2) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$ $\Leftrightarrow \frac{x^2}{x(1-x^2)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} x^2 \quad (1)$	
Tương tự: $\frac{y^2}{y(1-y^2)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} y^2 \quad (2); \quad \frac{z^2}{z(1-z^2)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} z^2 \quad (3)$ Từ (1); (2); (3) ta có $P \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} (x^2 + y^2 + z^2) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.	0,5
Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$ hay $a = b = c = \sqrt{3}$. Vậy $MinP = \frac{3\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow a = b = c = \sqrt{3}$	0,5

Câu 5 (2,0 điểm). Giải phương trình nghiệm nguyên: $y^4 + 2y^3 - y^2 - 2y - x^2 - x = 0$.

Ý	Nội dung	Điểm
	Ta có: $y^4 + 2y^3 - y^2 - 2y - x^2 - x = 0$ $\Leftrightarrow (y^2 + y - 1)^2 = x^2 + x + 1 \quad (*)$	0,5
	Nếu $x > 0$ thì $x^2 < x^2 + x + 1 < (x+1)^2$ suy ra $x^2 + x + 1$ không là số chính phương nên không tồn tại số nguyên x, y thỏa mãn (*). Nếu $x < -1$ thì $(x+1)^2 < x^2 + x + 1 < x^2$ suy ra $x^2 + x + 1$ không là số chính phương nên không tồn tại số nguyên x, y thỏa mãn (*).	0,5
	Nếu $x = -1$ hoặc $x = 0$ thì từ (*) suy ra $\Leftrightarrow y^2 + y - 1 = \pm 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ y = -1 \\ y = 0 \\ y = 1 \end{cases}$	0,5
	Vậy phương trình có nghiệm nguyên $(x; y) \in \{(-1; -2), (-1; -1), (-1; 0), (-1; 1), (0; -2), (0; -1), (0; 0), (0; 1)\}$	0,5

-----Hết-----