

Môn thi: TOÁN
Ngày thi: 22/11/2023
Thời gian làm bài: 150 phút

Bài I (5,0 điểm) Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{1 - \sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{1 + \sqrt{xy}} \right) : \left(1 + \frac{x + y + 2xy}{1 - xy} \right)$

với $x \geq 0; y \geq 0; xy \neq 1$.

1) Rút gọn biểu thức P .

2) Tìm tất cả giá trị nguyên của x để biểu thức $\frac{P\sqrt{x}}{x-1}$ nhận giá trị nguyên.

Bài II (5,0 điểm)

1) Cho đa thức $P(x) = x^{2023} + x^2 + a$. Biết $P(x)$ chia cho đa thức $x - 1$ được đa thức dư là 2023. Hãy tìm đa thức dư khi chia $P(x)$ cho đa thức $x^2 - 1$.

2) Xét các số thực a, b thỏa mãn $a^2 + b^2 = 32$. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $P = ab$.

3) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 11$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 14$.

Tính giá trị biểu thức $P = \sqrt{\frac{(a^2 + 11)(b^2 + 11)}{c^2 + 11}} + \sqrt{\frac{(b^2 + 11)(c^2 + 11)}{a^2 + 11}} + \sqrt{\frac{(c^2 + 11)(a^2 + 11)}{b^2 + 11}}$.

Bài III (3,0 điểm)

1) Giải phương trình $x^2 + x + 2 = 2x\sqrt{x+2}$.

2) Cho x, y là các số nguyên dương phân biệt thỏa mãn $2023x^{2211} + 2007y^{2211}$ chia hết cho $x + y$. Chứng minh $x + y$ là hợp số.

Bài IV (6,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$), các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H .

1) Tìm số đo của $\widehat{ACB}$ để $\widehat{AFE} = \widehat{DFE}$.

2) Chứng minh: $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$.

3) Đường trung trực của đoạn BC cắt các đường thẳng AC, AB lần lượt tại P và Q .

Chứng minh rằng trục tâm tam giác APQ thuộc đường thẳng MH .

Bài V (1,0 điểm) Cho tập S gồm 19 số nguyên. Chứng minh rằng ta luôn tìm được 10 số thuộc S sao cho tổng của chúng chia hết cho 10.

..... Hết

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ tên thí sinh: Số báo danh: