

A. KIẾN THỨC

- Đại số: Hết Chương II. Nhắc lại, bổ sung khái niệm về hàm số.

- Hình học: Hết bài 27. Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Thực hiện phép tính, rút gọn biểu thức số

Bài 1: Rút gọn các biểu thức sau

$$1/ \sqrt{72} + \sqrt{4\frac{1}{2}} - \sqrt{32} - \sqrt{162}$$

$$2/ \frac{1}{2}\sqrt{48} - 2\sqrt{75} - \frac{\sqrt{33}}{\sqrt{11}} + 5\sqrt{1\frac{1}{3}}$$

$$3/ \frac{1}{7+4\sqrt{3}} + \frac{1}{7-4\sqrt{3}}$$

$$4/ \left(\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} + 1 \right) \frac{1}{(\sqrt{2}+1)^2}$$

$$5/ (\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2}) : \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \right)$$

$$6/ \frac{3+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} - (\sqrt{3}+2)$$

$$7/ \left(\frac{2}{\sqrt{3}-1} + \frac{3}{\sqrt{3}-2} + \frac{15}{3-\sqrt{3}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}+5}$$

Dạng 2: Tìm x

Bài 2:

$$1/ \sqrt{1-4x+4x^2} = 5$$

$$2/ \sqrt{4-5x} = 12$$

$$3/ \sqrt{x^2-2x+4} = 2x-2$$

$$4/ \sqrt{x^2-2x} = \sqrt{2-3x}$$

$$5/ \sqrt{x-3} - 2\sqrt{x^2-9} = 0$$

$$6/ \sqrt{4x-20} + \sqrt{x-5} - \frac{1}{3}\sqrt{9x-45} = 4$$

$$7/ \frac{1}{2}\sqrt{x-1} - \frac{3}{2}\sqrt{9x-9} + 24\sqrt{\frac{x-1}{64}} = -17$$

$$8/ \sqrt{9x^2+18} + 2\sqrt{x^2+2} - \sqrt{25x^2+50} + 3 = 0$$

$$9/ \sqrt{x^2-8x+16} + |x+2| = 0$$

$$10/ (x+1)(x+4) - 3\sqrt{x^2+5x+2} = 6$$

Dạng 3 : Bài toán tổng hợp rút gọn BTDS và câu hỏi phụ

Bài 3 (TUYỂN SINH LỚP 10 TP HÀ NỘI 2017-2018)

Cho hai biểu thức:

$$A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5} \quad ; B = \frac{3}{\sqrt{x}+5} + \frac{20-2\sqrt{x}}{x-25} \quad x \geq 0; x \neq 25$$

1. Tính giá trị của biểu thức A khi x = 9;

2. Chứng minh: $B = \frac{1}{\sqrt{x}-5}$

3. Tìm tất cả các giá trị của x để A=B. $|x-4|$

Bài 4 (TUYỂN SINH LỚP 10 TP HÀ NỘI 2018-2019)

Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \frac{3\sqrt{x}+1}{x+2\sqrt{x}-3} - \frac{2}{\sqrt{x}+3}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi x=9.

b) Chứng minh $B = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$

c) Tìm tất cả các giá trị của x để $\frac{A}{B} \geq \frac{x}{4} + 5$

Bài 5 (TUYỂN SINH LỚP 10 HÀ NỘI NĂM 2019-2020)

Cho hai biểu thức $A = \frac{4(\sqrt{x}+1)}{25-x}$ và $B = \left(\frac{15-\sqrt{x}}{x-25} + \frac{2}{\sqrt{x}+5} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-5}$, với $x \geq 0, x \neq 25$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$.

2) Rút gọn biểu thức B

3) Tìm tất cả giá trị nguyên của x để biểu thức $P = A \cdot B$ đạt giá trị nguyên lớn nhất.

Bài 6 (TUYỂN SINH LỚP 10 HÀ NỘI NĂM 2020-2021)

Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}$ và $B = \frac{3}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}+5}{x-1}$, với $x \geq 0; x \neq 1$.

1) Tính giá trị biểu thức A khi $x = 4$.

2) Chứng minh $B = \frac{2}{\sqrt{x}+1}$.

3) Tìm tất cả các giá trị của x để biểu thức $P = 2A \cdot B + \sqrt{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 7: Cho biểu thức $P = \frac{3x+\sqrt{9x}-3}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

a) Rút gọn P

b) So sánh P với $\sqrt{P}$ với điều kiện $\sqrt{P}$ có nghĩa

c) Tìm x để $\frac{1}{P}$ nguyên

Bài 8: Cho biểu thức:

$$P = \left(2 - \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} + \frac{6\sqrt{x}+8}{x-4} \right) \text{ với } x \geq 0, x \neq 4$$

a) Rút gọn P .

b) Tìm x để $P < \frac{1}{2}$

Bài 9: Cho các biểu thức:

$$A = \frac{x-2}{2+\sqrt{x}} \quad (x \geq 0); \quad B = \left(\frac{8x\sqrt{x}-1}{2x-\sqrt{x}} - \frac{8x\sqrt{x}+1}{2x+\sqrt{x}} \right) : \frac{2x+1}{2x-1} \quad \left(x > 0; x \neq \frac{1}{2}; x \neq \frac{1}{4} \right)$$

a) Chứng minh khi $x = 3 + 2\sqrt{2}$ thì $A = \frac{5\sqrt{2}-1}{7}$

b) Rút gọn B .

c) Tìm x sao cho $\frac{A}{B} = \frac{x-2}{4\sqrt{x}}$

Bài 10. Cho hai biểu thức:

$$A = \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} \text{ và } B = \frac{11\sqrt{x}+6}{x-4} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \frac{3}{\sqrt{x}-2} \text{ với } x > 0; x \neq 4$$

- 1) Tính giá trị biểu thức A khi $x = 25$.
- 2) Chứng minh $B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$.
- 3) Đặt $P = A : B$. Tìm tất cả các giá trị của x thỏa mãn $|P+1| < 3P$.

Bài 11. Cho biểu thức $A = \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-4}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} + \frac{5\sqrt{x}-8}{2\sqrt{x}-x}$ với $x > 0, x \neq 4, x \neq 16$

- 1) Tính giá trị của A khi $x = 25$
- 2) Rút gọn biểu thức B
- 3) Cho $P = A.B$ Tìm giá trị của x thỏa mãn $P.\sqrt{x} = 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x-5} - 3$

Dạng 4: Hàm số và đồ thị

Bài 12: Viết phương trình đường thẳng:

- a) đi qua hai điểm $A(1; -2)$ và $B(2; 1)$.
- b) có hệ số góc là -2 và đi qua điểm $A(1; 5)$.
- c) đi qua điểm $B(-1; 8)$ và song song với đường thẳng $y = 4x + 3$.
- d) song song với đường thẳng $y = -x + 5$ và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2.

Bài 13: Cho hai hàm số $y = 2x + 3m$ và $y = (2m + 1)x + 2m - 3$. Tìm điều kiện của m để:

- a) Hai đường thẳng cắt nhau
- b) Hai đường thẳng song song với nhau
- c) Hai đường thẳng trùng nhau

Bài 14: Cho 3 đường thẳng:

$$(d_1): y = 2x + 3 \quad (d_2): y = -x + 4 \quad (d_3): y = mx + m - 1$$

- a) Vẽ hai đường thẳng $(d_1); (d_2)$ trên cùng 1 mặt phẳng tọa độ.
- b) Tìm m để 3 đường thẳng trên đồng quy.

Bài 15: Cho hàm số $d_1: y = (m - 1)x + 2m + 1$ (m khác 1)

- a) Tìm m để đường thẳng d_1 cắt trục tung tại điểm có tung độ là -3 . Vẽ đồ thị hàm số vừa tìm được và chứng tỏ giao điểm đồ thị vừa tìm được với đường thẳng $d: y = x + 1$ nằm trên trục hoành.
- b) Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng d_1 đạt giá trị lớn nhất.

Bài 16: Cho hàm số $y = (2 - m)x + m + 1$ (với m là tham số; $m \neq 2$) có đồ thị là đường thẳng d .

- a) Khi $m = 0$, hãy vẽ d trên hệ trục tọa độ Oxy.
- b) Tìm m để d cắt đường thẳng $y = 2x - 5$ tại điểm có hoành độ bằng 2.
- c) Tìm m để d cùng với các trục tọa độ Ox, Oy tạo thành một tam giác có diện tích bằng 2.

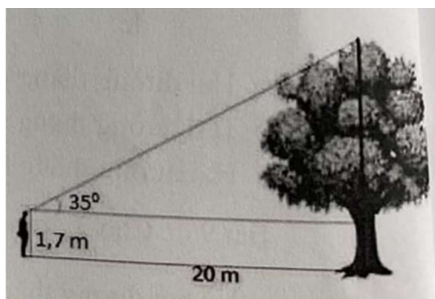
Bài 17: Cho hàm số $y = (m-4)x + 4$ có đồ thị là đường thẳng (d) ($m \neq 4$)

- a) Tìm m để đồ thị hàm số đi qua $A(1; 6)$.
- b) Vẽ đồ thị hàm số với m vừa tìm được ở câu a.
- c) Tìm m để đường thẳng (d) song song với đường thẳng $(d_1): y = (m - m^2)x + m + 2$.

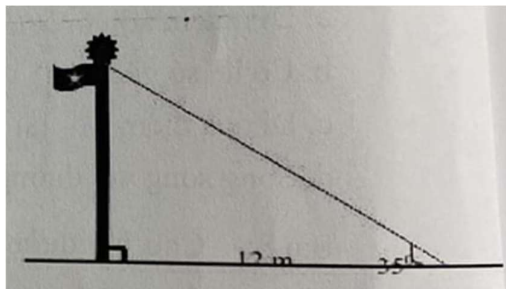
Dạng 5: Bài toán thực tế hình học

Bài 18.

Tính chiều cao của cây trong hình vẽ bên. (Làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất)



Bài 19. Một cột cờ vuông góc với mặt đất có bóng dài 12 m, tia nắng của mặt trời tạo với mặt đất một góc là 35° (hình vẽ bên). Tính chiều cao của cột cờ?



Dạng 6: Bài toán hình học tổng hợp

Bài 20: Cho nửa đường tròn (O), đường kính $AB=2R$, điểm C thuộc nửa đường tròn. Kẻ phân giác BI của góc ABC (I thuộc đường tròn (O)). Gọi E là giao điểm của AI và BC.

- a) Tam giác ABE là tam giác gì?
- b) Gọi K là giao điểm của AC và BI. Chứng minh: EK vuông góc với AB.
- c) Gọi F là điểm đối xứng với K qua I. Chứng minh: AF là tiếp tuyến của (O).

Bài 21: Cho điểm M bất kì trên đường tròn tâm O đường kính AB. Tiếp tuyến tại M và tại B của (O) cắt nhau tại D. Qua O kẻ đường thẳng vuông góc với OD cắt MD tại C và cắt BD tại N.

- a) Chứng minh: $DC = DN$
- b) Chứng minh: AC là tiếp tuyến của đường tròn tâm O
- c) Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ M xuống AB, I là trung điểm MH.

Chứng minh B, C, I thẳng hàng.

d) Qua O kẻ đường vuông góc với AB, cắt (O) tại K (K và M nằm khác phía với đường thẳng AB). Tìm vị trí của M để diện tích tam giác MHK lớn nhất.

Bài 22: Cho đường tròn (O; R) đường kính AB và điểm C bất kỳ thuộc đường tròn (C khác A và B). Kẻ tiếp tuyến tại A của đường tròn, tiếp tuyến này cắt tia BC ở D. Đường thẳng tiếp xúc với đường tròn tại C cắt AD ở E.

- 1. Chứng minh bốn điểm A, E, C, O cùng thuộc một đường tròn.
- 2. Chứng minh $BC \cdot BD = 4R^2$ và OE song song với BD.
- 3. Đường thẳng kẻ qua O và vuông góc với BC tại N cắt EC ở F. CMR: BF là tiếp tuyến của đường tròn (O;R).

Bài 22: Cho đường tròn $(O; R)$. Từ điểm A nằm ngoài $(O; R)$ vẽ hai tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (M và N là các tiếp điểm).

- Chứng minh: Tam giác AMN là tam giác cân.
- Vẽ đường kính MB của $(O; R)$. Chứng minh: $OA \parallel NB$.
- Vẽ dây NC của $(O; R)$ vuông góc với MB tại H . Gọi I là giao điểm của AB và NH .

Tính $\frac{NI}{NC}$?

Bài 23: Cho đường tròn (O) đường kính AB và điểm C thuộc đường tròn (O) (C khác A, B) sao cho $AC > BC$. Qua O vẽ đường thẳng vuông góc với dây cung AC tại H . Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt tia OH tại D . Đoạn thẳng DB cắt đường tròn (O) tại E .

- Chứng minh $HA = HC$ và $\widehat{DCO} = 90^\circ$;
- Chứng minh rằng $DH \cdot DO = DE \cdot DB$;
- Trên tia đối của tia EA lấy điểm F sao cho E là trung điểm cạnh AF . Từ F vẽ đường thẳng vuông góc với đường thẳng AD tại K . Đoạn thẳng FK cắt đường thẳng BC tại M . Chứng minh $MK = MF$.

Bài 24. Cho đường tròn $(O; R)$, đường kính AB . Gọi H là trung điểm của OA . Qua H kẻ đường thẳng vuông góc với AB cắt (O) tại hai điểm C và D .

- Tứ giác $ACOD$ là hình gì? Chứng minh ?
- Qua điểm D kẻ tiếp tuyến với đường tròn (O) cắt tia OA tại M . Chứng minh MC là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại C và tam giác MCD là tam giác đều.
- Tính chu vi và diện tích của tam giác MCD theo R là bán kính của đường tròn tâm O .
- Gọi N là trung điểm của HB , đường thẳng kẻ qua H vuông góc với CN cắt đường thẳng CA tại E . Chứng minh A là trung điểm của CE .

Bài 25. Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A nằm ngoài (O) . Từ A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với (O) (B, C là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OA và BC .

- Chứng minh bốn điểm A, B, O, C cùng thuộc một đường tròn.
- Chứng minh OA là đường trung trực của BC .
- Lấy D đối xứng với B qua O . Gọi E là giao điểm của đoạn thẳng AD với (O) (E không trùng với D). Chứng minh $\frac{DE}{BE} = \frac{BD}{BA}$.
- Tính số đo góc HEC .

Bài 26. Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A nằm ngoài đường tròn. Từ A kẻ tiếp tuyến AE đến đường tròn (O) (với E là tiếp điểm). Vẽ dây EH vuông góc với AO tại M .

- Cho biết bán kính $R = 5\text{cm}$; $OM = 3\text{cm}$. Tính độ dài dây EH .
- Chứng minh: AH là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

- c) Đường thẳng qua O vuông góc với OA cắt AH tại B. Vẽ tiếp tuyến BF với đường tròn (O) (F là tiếp điểm). Chứng minh: 3 điểm E, O, F thẳng hàng và $BF \cdot AE = R^2$.
- d) Trên tia HB lấy điểm I ($I \neq B$), qua I vẽ tiếp tuyến thứ hai với đường tròn (O) cắt các đường thẳng BF, AE lần lượt tại C và D. Vẽ đường thẳng IF cắt AE tại Q. Chứng minh: $AE = DQ$.

Dạng 7. Vận dụng cao

Bài 27. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $x + y \leq 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \sqrt{1 + x^2 y^2}$.

Bài 28. Cho $x > 0; y > 0; z > 0$ thỏa mãn: $x + 2y + 3z \geq 20$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = x + y + z + \frac{3}{x} + \frac{9}{2y} + \frac{4}{z}$.

Bài 29: Với a, b, c là các số thực thỏa mãn:

$$(3a + 3b + 3c)^3 = 24 + (3a + b - c)^3 + (3b + c - a)^3 + (3c + a - b)^3$$

Chứng minh rằng: $(a + 2b)(b + 2c)(c + 2a) = 1$

Bài 30. Giải phương trình: $x^2 + 4x + 7 = (x + 4)\sqrt{x^2 + 7}$

Bài 31. Giải phương trình $x^2 + 4x + 18 = 6\sqrt{x + 5} + 2x\sqrt{3x + 4}$.

Bài 32. Cho x, y, z là các số dương thay đổi thỏa mãn: $xy + yz + zx = 5$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $T = 3x^2 + 3y^2 + z^2$

-----**Hết**-----