

Môn: TOÁN

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian phát đề)

Ngày thi: 10/11/2024

Bài 1: (5,0 điểm)

1. Cho hai biểu thức $A = \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}} + \frac{2(x+1)}{\sqrt{x}}$ và $B = \sqrt{x}+1 + \frac{x}{\sqrt{x}-1}$ với $x > 0$ và $x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm x để $A = B$

2. Cho a, b là hai số thực thỏa mãn $0 < a < 1; 0 < b < 1; a \neq b$ và $a-b = \sqrt{1-b^2} - \sqrt{1-a^2}$
Tìm giá trị của biểu thức $M = \sqrt{a^2+b^2} + 2024$

3. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} xy + 3y^2 + x = 3 \\ x^2 + xy - 2y^2 = 0 \end{cases}$$

Bài 2: (3,0 điểm)

1. Cho a, b thỏa mãn $a > b$ và $a.b = 1$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2+b^2}{a-b} \geq 2\sqrt{2}$.

2. Cho x, y, z > 0 thỏa mãn $x + y + z = 2025$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^4}{(x^2+y^2)(x+y)} + \frac{y^4}{(y^2+z^2)(y+z)} + \frac{z^4}{(z^2+x^2)(z+x)}$$

Bài 3: (4,0 điểm)

1. Tìm tất cả các cặp số nguyên tố (p, q) sao cho $p^2 - 2q^2 = 41$

2. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $(x - 2024)^2 = y^4 - 6y^3 + 11y^2 - 6y$

3. Một chiếc hộp có 50 tấm thẻ giống nhau, được đánh số tự nhiên liên tiếp từ 10 đến 59. Rút ngẫu nhiên một tấm thẻ trong hộp. Tính xác suất của biến cố sau:

a) Rút được tấm thẻ mà tổng các chữ số trên tấm thẻ đó là một số chính phương.

b) Rút được một tấm thẻ mà số ghi trên tấm thẻ lớn hơn hoặc bằng hai chữ số tận cùng của số 5^{2024} .

Bài 4: (8,0 điểm)

1. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ các tiếp tuyến Ax, By. Lấy điểm M bất kỳ thuộc nửa đường tròn (M khác A và B). Kẻ MH vuông góc với AB tại H.

a) Tính MH biết $AI = 3\text{cm}$, $HB = 4\text{cm}$.

b) Qua M kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn cắt Ax, By lần lượt tại C và D. Gọi I là giao điểm của AD và BC. Chứng minh M, I, H thẳng hàng.

c) Vẽ đường tròn tâm (O') nội tiếp tam giác AMB tiếp xúc với AB ở Q. Gọi S_{AMB} là diện tích của tam giác AMB. Chứng minh $S_{AMB} = AQ.BQ$

2. Cho tam giác ABC nhọn. Chứng minh rằng: $\tan A.\tan B.\tan C = \tan A + \tan B + \tan C$

----- HẾT -----