

Câu 1 (3,0 điểm).

- a) Tìm tất cả các cặp số nguyên (m, n) thỏa mãn: $m^2 + m = 3^{2024n} + 19$.
- b) Cho a, b, c, d là các số nguyên biết $a + 3b = c + 2d$. Chứng minh rằng $a^2 + 9b^2 + c^2 + 4d^2$ viết được dưới dạng tổng ba số chính phương.

Câu 2 (7,0 điểm).

- a) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x-y)^3 + (x-y)(xy+x-y) + xy = 0 \\ y(y+2)(y+5)(x+2) = 35x^2. \end{cases}$$
- b) Giải phương trình $4(x-1)^2\sqrt{x+1} - 4(x-1)\sqrt{x^2-1} = (x^2+2)(x^2-2x)$.

Câu 3 (1,5 điểm). Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác thỏa mãn $2c + 3b = abc$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{5}{b+c-a} + \frac{7}{a+b-c} + \frac{8}{a+c-b}$.

Câu 4 (7,5 điểm). Cho đường tròn $(O; R)$ cố định và điểm A cố định nằm ngoài đường tròn $(O; R)$. Từ điểm A vẽ hai tiếp tuyến AB, AC tới đường tròn $(O; R)$ (B, C là các tiếp điểm). Qua A vẽ đường thẳng cố định cắt đường tròn $(O; R)$ tại hai điểm phân biệt I và E (I nằm giữa hai điểm A, E và $\widehat{EBC} < 90^\circ$). Gọi H là giao điểm của AO và BC . Qua H vẽ đường thẳng (d) song song với BE , biết (d) cắt các đường thẳng BI, BA lần lượt tại Q và N . Đường thẳng BE cắt đường thẳng AO tại K . Gọi M là giao điểm của hai đường thẳng AQ và BK .

- a) Chứng minh rằng $\frac{BI}{CI} = \frac{BE}{CE}$.
- b) Chứng minh rằng HB là đường phân giác của $\widehat{NHM}$.
- c) Vẽ đường tròn $(P; R_1)$ thay đổi nhưng luôn đi qua hai điểm I và E . Từ A vẽ hai tiếp tuyến AD, AJ với đường tròn $(P; R_1)$ (D, J là các tiếp điểm). Gọi T là giao điểm của hai đường thẳng DJ và AE . Chứng minh đường tròn đường kính TP luôn đi qua 2 điểm cố định.

Câu 5 (1,0 điểm). Trong phòng có 121 người, biết mỗi người quen với ít nhất 81 người khác. Chứng minh rằng trong phòng phải có 4 người từng đôi một quen nhau.

.....HẾT.....

Họ và tên thí sinh..... Số báo danh.....

Chú ý: Thí sinh không được phép sử dụng máy tính bỏ túi.

Câu 1 (3,0 điểm).

- a) Chứng minh rằng $n^5 + 9n + 3^{2025}$ không phải là số chính phương với n là số tự nhiên.
b) Tìm tất cả các cặp số nguyên (m, n) thỏa mãn: $m^2 + m = 3^{2024n} + 19$.

Câu 2 (7,0 điểm).

a) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x-y)^3 + (x-y)(xy+x-y) + xy = 0 \\ (y^2+1)(3x^2+6x+8) = 2y^2+5. \end{cases}$$

b) Giải phương trình $\sqrt{3x+1} - \sqrt{6-x} + 3x^2 - 35x + 97 = 0$.

Câu 3 (1,5 điểm). Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác thỏa mãn $b = \frac{c(ab-1)}{2}$.

Chứng minh rằng $\frac{3}{b+c-a} + \frac{5}{a+c-b} + \frac{4}{a+b-c} \geq 4\sqrt{3}$.

Câu 4 (7,5 điểm). Cho đường tròn $(O; R)$ cố định và điểm A cố định nằm ngoài đường tròn $(O; R)$. Từ điểm A vẽ hai tiếp tuyến AB, AC tới đường tròn $(O; R)$ (B, C là các tiếp điểm). Qua A vẽ đường thẳng cố định cắt đường tròn $(O; R)$ tại hai điểm phân biệt I và E (I nằm giữa hai điểm A, E và $\widehat{EBC} < 90^\circ$). Gọi H là giao điểm của AO và BC . Qua H vẽ đường thẳng (d) song song với BE , biết (d) cắt các đường thẳng BI, BA lần lượt tại Q và N .

a) Chứng minh rằng $\frac{BI}{BE} = \frac{CI}{CE}$.

b) Chứng minh rằng Q là trung điểm của NH .

c) Vẽ đường tròn $(P; R_1)$ thay đổi nhưng luôn đi qua hai điểm I và E . Từ A vẽ hai tiếp tuyến AD, AJ với đường tròn $(P; R_1)$ (D, J là các tiếp điểm). Chứng minh đường thẳng DJ luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 5 (1,0 điểm). Trong phòng có 121 người, biết mỗi người quen với ít nhất 81 người khác. Chứng minh rằng trong phòng phải có 4 người từng đôi một quen nhau.

.....HẾT.....

Họ và tên thí sinh.....

Số báo danh.....

Chú ý: Thí sinh không được phép sử dụng máy tính bỏ túi.

Câu 1 (3,0 điểm).

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên (m, n) thỏa mãn: $m^2 + m = 3^{2024n} + 19$.

b) Cho a, b, c, d là các số nguyên biết $a + 3b = c + 2d$. Chứng minh rằng $a^2 + 9b^2 + c^2 + 4d^2$ viết được dưới dạng tổng ba số chính phương.

Câu 2 (7,0 điểm).

a) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x-y)^3 + (x-y)(xy+x-y) + xy = 0 \\ y(y+2)(y+5)(x+2) = 35x^2. \end{cases}$$

b) Giải phương trình $4(x-1)^2\sqrt{x+1} - 4(x-1)\sqrt{x^2-1} = (x^2+2)(x^2-2x)$.

Câu 3 (1,5 điểm). Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác thỏa mãn $2c + 3b = abc$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{5}{b+c-a} + \frac{7}{a+b-c} + \frac{8}{a+c-b}$.

Câu 4 (7,5 điểm). Cho đường tròn $(O; R)$ cố định và điểm A cố định nằm ngoài đường tròn $(O; R)$. Từ điểm A vẽ hai tiếp tuyến AB, AC tới đường tròn $(O; R)$ (B, C là các tiếp điểm). Qua A vẽ đường thẳng cố định cắt đường tròn $(O; R)$ tại hai điểm phân biệt I và E (I nằm giữa hai điểm A, E và $\widehat{EBC} < 90^\circ$). Gọi H là giao điểm của AO và BC . Qua H vẽ đường thẳng (d) song song với BE , biết (d) cắt các đường thẳng BI, BA lần lượt tại Q và N . Đường thẳng BE cắt đường thẳng AO tại K . Gọi M là giao điểm của hai đường thẳng AQ và BK .

a) Chứng minh rằng $\frac{BI}{CI} = \frac{BE}{CE}$.

b) Chứng minh rằng HB là đường phân giác của $\widehat{NHM}$.

c) Vẽ đường tròn $(P; R_1)$ thay đổi nhưng luôn đi qua hai điểm I và E . Từ A vẽ hai tiếp tuyến AD, AJ với đường tròn $(P; R_1)$ (D, J là các tiếp điểm). Gọi T là giao điểm của hai đường thẳng DJ và AE . Chứng minh đường tròn đường kính TP luôn đi qua 2 điểm cố định.

Câu 5 (1,0 điểm). Trong phòng có 121 người, biết mỗi người quen với ít nhất 81 người khác. Chứng minh rằng trong phòng phải có 4 người từng đôi một quen nhau.

.....**HẾT**.....

Họ và tên thí sinh.....

Số báo danh.....

Chú ý: Thí sinh không được phép sử dụng máy tính bỏ túi.

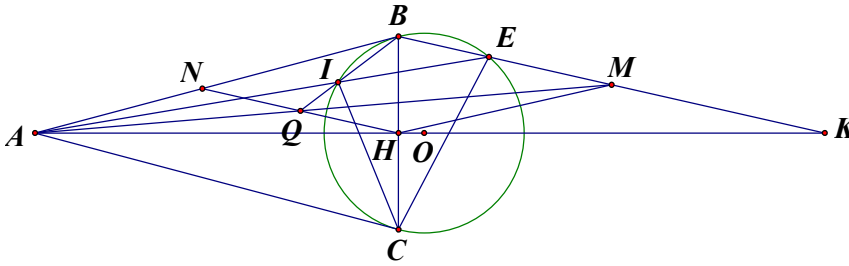
HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI CHÍNH THỨC

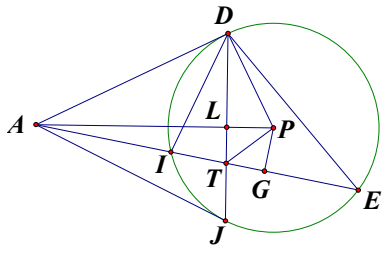
Môn thi: TOÁN – Bảng A

(Hướng dẫn chấm gồm 04 trang)

Câu	ĐÁP ÁN THAM KHẢO	Điểm
Câu 1a (2,0)	Tìm tất cả các cặp số nguyên (m, n) thỏa mãn: $m^2 + m = 3^{2024n} + 19$.	
	Trường hợp 1: với $n < 0$, $m^2 + m$ là số nguyên, $3^{2024n} + 19$ không phải số nguyên (loại)	0,25
	Trường hợp 2: Với $n = 0 \Rightarrow m^2 + m = 20 \Rightarrow m^2 + m - 20 = 0 \Rightarrow (m - 4)(m + 5) = 0$ $\Rightarrow m = 4$ (thỏa mãn), $m = -5$ (thỏa mãn)	0,5
	Trường hợp 3: Với $n > 0$: Ta có $3^{2024n} + 19$ chia 3 dư 1	0,5
	Ta có $m^2 + m = m(m + 1)$, nếu $m = 3k$, $m = 3k + 2 \Rightarrow m(m + 1) : 3$	0,25
	Nếu $m = 3k + 1 \Rightarrow m(m + 1)$ chia 3 dư 2 $\Rightarrow m^2 + m = 3^{2024n} + 19$ (vô lí)	0,25
	Vậy $(m, n) = (4, 0)$, $(m, n) = (-5, 0)$	0,25
Câu 1b (1,0)	Cho a, b, c, d là các số nguyên biết $a + 3b = c + 2d$. Chứng minh rằng $a^2 + 9b^2 + c^2 + 4d^2$ viết được dưới dạng tổng ba số chính phương.	
	Từ $a + 3b = c + 2d \Rightarrow a + 3b - c - 2d = 0 \Rightarrow 2a(a + 3b - c - 2d) = 0$	0,5
	Ta có $a^2 + 9b^2 + c^2 + 4d^2 = a^2 + 9b^2 + c^2 + 4d^2 + 2a(a + 3b - c - 2d)$ $= a^2 + 9b^2 + c^2 + 4d^2 + 2a^2 + 6ab - 2ac - 4ad = (a - c)^2 + (a - 2d)^2 + (a + 3b)^2$ (điều phải chứng minh)	0,5
Câu 2a (3,5)	Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x - y)^3 + (x - y)(xy + x - y) + xy = 0(1) \\ y(y + 2)(y + 5)(x + 2) = 35x^2(2) \end{cases}$	
	Từ PT (1) $\Leftrightarrow (x - y)^3 + (x - y)^2 + (x - y)xy + xy = 0 \Leftrightarrow (x - y + 1)(x^2 - xy + y^2) = 0$	1,0
	Trường hợp 1: $x^2 - xy + y^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = 0 \Rightarrow x = y = 0$ thỏa mãn PT (2)	1,0
	Trường hợp 2: $x - y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = x + 1$ thay vào phương trình (2) Ta có: $(x + 1)(x + 6)(x + 3)(x + 2) = 35x^2$	0,5

	$\Leftrightarrow (x^2 + 7x + 6)(x^2 + 5x + 6) = 35x^2 \Leftrightarrow \left(x + \frac{6}{x} + 7\right)\left(x + \frac{6}{x} + 5\right) = 35 \text{ (vì } x = 0 \text{ không là nghiệm)}$	0,25
	$\Leftrightarrow \left(x + \frac{6}{x}\right)^2 + 12\left(x + \frac{6}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{6}{x} = 0 \\ x + \frac{6}{x} = -12 \end{cases} \quad \text{Với } x + \frac{6}{x} = 0 \text{ (Phương trình vô nghiệm)}$	0,25
	$x + \frac{6}{x} = -12 \Leftrightarrow x^2 + 12x + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -6 + \sqrt{30} \Rightarrow y = -5 + \sqrt{30} \\ x = -6 - \sqrt{30} \Rightarrow y = -5 - \sqrt{30} \end{cases}$	0,25
	Vậy hệ phương trình có 3 nghiệm: $(0;0), (-6 + \sqrt{30}; -5 + \sqrt{30}), (-6 - \sqrt{30}; -5 - \sqrt{30})$	0,25
Câu 2b (3,5)	Giải phương trình $4(x-1)^2\sqrt{x+1} - 4(x-1)\sqrt{x^2-1} = (x^2+2)(x^2-2x)$.	
	ĐKXĐ: $x = -1$ hoặc $x \geq 1$	0,25
	Xét $x = -1$ (không thỏa mãn)	0,25
	Xét $x \geq 1$ ta có PT $\Leftrightarrow 4(x-1)\sqrt{x^2-1}(\sqrt{x-1}-1) = (x^2+2)(x^2-2x)$	0,5
	$\Leftrightarrow 4(x-1)\sqrt{x^2-1} \cdot \frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1} = x(x^2+2)(x-2)$	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \frac{4(x-1)\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x-1}+1} = x(x^2+2) \end{cases} \quad \text{Ta có } x = 2 \text{ (thỏa mãn)}$	1,0
	Với $\frac{4(x-1)\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x-1}+1} = x(x^2+2) \Leftrightarrow 4(x-1)\sqrt{x^2-1} = x(x^2+2)(\sqrt{x-1}+1) \quad (*)$	0,25
	Ta có $\sqrt{x-1}+1 > \sqrt{x-1}, \quad x \geq 2\sqrt{x-1}, \quad x^2+2 > 2\sqrt{x^2-1} \text{ (với } x \geq 1)$	0,25
	$\Rightarrow 4(x-1)\sqrt{x^2-1} < x(x^2+2)(\sqrt{x-1}+1)$ nên phương trình (*) vô nghiệm.	0,25
	Vậy phương trình có nghiệm là $x = 2$.	0,25
Câu 3 (1,5)	Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác thỏa mãn $2c + 3b = abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{5}{b+c-a} + \frac{7}{a+b-c} + \frac{8}{a+c-b}$.	
	$P = 2\left(\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{a+b-c}\right) + 3\left(\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{a+c-b}\right) + 5\left(\frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{a+c-b}\right)$	0,5

	Áp dụng BĐT: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ ($x, y > 0$) $\Rightarrow P \geq \frac{8}{2b} + \frac{12}{2c} + \frac{20}{2a} = 2\left(\frac{2}{b} + \frac{3}{c} + \frac{5}{a}\right)$	0,5
	Ta có $2c + 3b = abc \Rightarrow \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = a$.	0,25
	$P \geq 2\left(a + \frac{5}{a}\right) \geq 2.2\sqrt{a \cdot \frac{5}{a}} = 4\sqrt{5}$ (Bất đẳng thức Cosi).	0,25
	Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $4\sqrt{5}$. Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = \sqrt{5}$	
Câu 4a (4,0)	Chứng minh rằng $\frac{BI}{CI} = \frac{BE}{CE}$.  Xét hai tam giác ABI và tam giác AEB có $\widehat{BAE}$ chung, và $\widehat{ABI} = \widehat{BEI} = \frac{1}{2}\widehat{B\hat{A}I}$ $\Rightarrow \Delta ABI \sim \Delta AEB(g.g) \Rightarrow \frac{BI}{BE} = \frac{AB}{AE}$ (1) Tương tự $\Delta ACI \sim \Delta AEC(g.g) \Rightarrow \frac{CI}{CE} = \frac{AC}{AE}$ (2) Mà $AB = AC$, kết hợp (1), (2) $\Rightarrow \frac{BI}{BE} = \frac{CI}{CE} \Rightarrow \frac{BI}{CI} = \frac{BE}{CE}$ (điều phải chứng minh)	1,0 1,0 1,0 1,0
Câu 4b (2,5)	Chứng minh rằng HB là đường phân giác của $\widehat{NHM}$. Xét hai ΔBQN và ΔEBI có $\widehat{NBQ} = \widehat{BEI}$, $\widehat{NQB} = \widehat{EBI}$ (so le trong) $\Rightarrow \Delta BQN \sim \Delta EBI(g.g) \Rightarrow \frac{BQ}{NQ} = \frac{EB}{IB}$ (3) Xét ΔBHQ và ΔEIC có $\widehat{QBH} = \widehat{IEC} = \frac{1}{2}\widehat{B\hat{A}I}$, và $\widehat{ECI} = \widehat{BQH}$ (cùng bù $\widehat{IBE}$) $\Rightarrow \Delta BHQ \sim \Delta EIC(g.g) \Rightarrow \frac{QB}{QH} = \frac{EC}{IC}$ (4) Từ (3), (4) kết hợp $\frac{BI}{BE} = \frac{CI}{CE} \Rightarrow QH = QN \Rightarrow Q$ là trung điểm HN	0,75 0,5 0,25 0,5

	Xét tam giác ABK có $HN \parallel BK$, và Q là trung điểm $HN \Rightarrow M$ là trung điểm BK .	0,25
	Tam giác BHK vuông tại H có M là trung điểm của $BK \Rightarrow$ Tam giác BHM cân tại $M \Rightarrow \widehat{MBH} = \widehat{MHB}$ mà $\widehat{MBH} = \widehat{NHB} \Rightarrow \widehat{NHB} = \widehat{MHB} \Rightarrow HB$ là đường phân giác $\widehat{NHM}$ (điều phải chứng minh)	0,25
Câu 4c (1,0)	Vẽ đường tròn $(P; R_1)$ thay đổi nhưng luôn đi qua hai điểm I và E . Từ A vẽ hai tiếp tuyến AD, AJ với đường tròn $(P; R_1)$ (D, J là các tiếp điểm). Gọi T là giao điểm của hai đường thẳng DJ và AE . Chứng minh đường tròn đường kính TP luôn đi qua 2 điểm cố định.	
		
	Gọi G là trung điểm của $IE \Rightarrow G$ là điểm cố định, gọi L là giao điểm của AP và $DJ \Rightarrow DJ \perp AP$	
	Tam giác APG đồng dạng với tam giác ATL (g.g) $\Rightarrow AL \cdot AP = AT \cdot AG$	0,25
	Tam giác ADP vuông tại D có DL là đường cao $\Rightarrow AL \cdot AP = AD^2$	0,25
	$\triangle ADI$ và $\triangle AED$ có góc A chung, và $\widehat{ADI} = \widehat{AED}$ (cùng chắn cung DI của đường tròn tâm P) $\triangle ADI \sim \triangle AED$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{AI}{AD} \Rightarrow AD^2 = AI \cdot AE$ (không đổi)	0,25
	$\Rightarrow AT \cdot AG$ không đổi, mà AG không đổi nên AT không đổi $\Rightarrow$ điểm T cố định. Vậy đường tròn đường kính TP luôn đi qua 2 điểm cố định là T và G .	0,25
Câu 5 (1,0)	Trong phòng có 121 người, biết mỗi người quen với ít nhất 81 người khác. Chứng minh rằng trong phòng phải có 4 người từng đôi một quen nhau.	
	Xét A là một người bất kì trong phòng chứa 121 người đó suy ra A quen với ít nhất 81 người khác. Ta mời tất cả các người không quen A ra khỏi phòng thì số người được mời ra nhiều nhất là $120 - 81 = 39$ (người). Khi đó trong phòng còn chỉ A và 81 người quen A , tức là còn lại trong phòng có ít nhất 82 người.	0,5
	Gọi B là một người khác A là 1 người trong phòng chứa 82 người. Ta mời tất cả những người không quen B ra khỏi phòng suy ra số người trong phòng còn lại ít nhất là $82 - 39 = 43$ (người).	0,25
	Gọi C là một người khác 2 người A và B trong 43 người còn lại. Ta mời tất cả những người không quen C ra khỏi phòng suy ra số người còn lại ít nhất ở trong phòng là $43 - 39 = 4$ (người). Tức là trong phòng có ít nhất 4 người đôi 1 quen nhau.	0,25

.....**HẾT**.....

Ghi chú: Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn cho điểm tối đa.