

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1 (4 điểm).

a) Tính giá trị biểu thức: $A = \frac{7 \cdot 14^{10} \cdot 2 + 1024 \cdot 21 \cdot 7^{10}}{-10 \cdot 2^8 \cdot 7^9 \cdot 98 + 28^5 \cdot 7^6}$

b) Tính: $B = \left(\frac{1}{4} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{9} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{16} - 1\right) \cdots \left(\frac{1}{100} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{121} - 1\right)$

c) Tìm x biết: $|x+1| + |x+2| + |x+3| + \dots + |x+100| = 605x$

Câu 2 (4 điểm).

a) Tìm x, y biết: $\frac{2x-1}{5} = \frac{3y-2}{3}$ và $x + y = 2$

b) Cho a, b, c là các số thực khác 0. Tìm các số thực x, y, z khác không

thỏa mãn: $\frac{xy}{ay+bx} = \frac{yz}{bz+cy} = \frac{zx}{cx+az} = \frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}$

Câu 3 (2 điểm)

a) Chứng minh rằng $\frac{10^{2021} + 539}{9}$ có giá trị là một số tự nhiên.

b) Chứng minh đa thức sau không có nghiệm

$$A = x^{12} - x^9 + x^8 - x^7 + x^6 - x^3 + 1$$

Câu 4 (8,0 điểm)

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $\widehat{B} = 2\widehat{C}$. Kẻ $AH \perp BC (H \in BC)$. Trên tia HC lấy D sao cho $HD = HB$. Từ C kẻ đường thẳng CE vuông góc với đường thẳng AD ($E \in AD$).

a) Tam giác ABD là tam giác gì? Vì sao?

b) Chứng minh $DH = DE; HE \parallel AC$

c) So sánh HE^2 và $(BC^2 - AD^2):4$

d) Gọi K giao AH và CE , lấy điểm I bất kì thuộc đoạn thẳng HE (I khác H ; I khác E). Chứng minh $\frac{3}{2}AC < IA + IK + IC$

Câu 5 (2 điểm)

Tìm x nguyên biết: $|x-1| + |x-2| + |x-3| + \dots + |x-90| = 2025$

_____ Hết _____

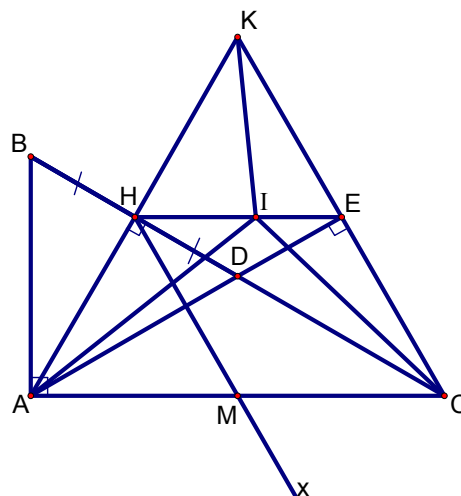
Câu	Ý	Hướng dẫn	Điểm
Câu 1 (4 điểm)	a	$\frac{7 \cdot 14^{10} \cdot 2 + 1024 \cdot 21 \cdot 7^{10}}{-10 \cdot 2^8 \cdot 7^9 \cdot 98 + 28^5 \cdot 7^6} = \frac{7 \cdot (2 \cdot 7)^{10} \cdot 2 + 2^{10} \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7^{10}}{-5 \cdot 2 \cdot 2^8 \cdot 7^9 \cdot 2 \cdot 7^2 + (2^2 \cdot 7)^5 \cdot 7^6}$	0,5
		$= \frac{7 \cdot 2^{10} \cdot 7^{10} \cdot 2 + 2^{10} \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7^{10}}{-5 \cdot 2 \cdot 2^8 \cdot 7^9 \cdot 2 \cdot 7^2 + (2^2 \cdot 7)^5 \cdot 7^6} = \frac{2^{11} \cdot 7^{11} + 2^{10} \cdot 3 \cdot 7^{11}}{-5 \cdot 2^{10} \cdot 7^{11} + 2^{10} \cdot 7^{11}}$	0,5
		$= \frac{2^{10} \cdot 7^{11} (2 + 3)}{2^{10} \cdot 7^{11} (-5 + 1)} = \frac{-5}{4}$	0,25
	b	$\left(\frac{1}{4} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{9} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{16} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{100} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{121} - 1\right) = \frac{-3}{4} \cdot \frac{-8}{9} \cdot \frac{-15}{16} \dots \frac{-99}{100} \cdot \frac{-120}{121}$ Nhận xét: Tích trên có chẵn các thừa số âm	0,5
		$= \frac{3 \cdot 8 \cdot 15 \dots 99 \cdot 120}{4 \cdot 9 \cdot 16 \dots 100 \cdot 121} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \dots 9 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 12}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 \dots 10 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 11}$	0,5
		$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 9 \cdot 10}{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots 10 \cdot 11} \cdot \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \dots 11 \cdot 12}{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots 10 \cdot 11} = \frac{1}{11} \cdot \frac{12}{2} = \frac{6}{11}$	0,5
	c	$\forall i \begin{cases} x+1 \geq 0; \forall x \\ x+2 \geq 0; \forall x \\ \dots \\ x+100 \geq 0; \forall x \end{cases}$ $\Rightarrow x+1 + x+2 + x+3 + \dots + x+100 \geq 0; \forall x$ Mà $ x+1 + x+2 + x+3 + \dots + x+100 = 605x$ $\Rightarrow 605x \geq 0$ $\Rightarrow x \geq 0$	0,25
		Khi đó $\begin{cases} x+1 = x+1 \\ x+2 = x+2 \\ \dots \\ x+100 = x+100 \end{cases}$	0,25
		Ta có $x+1 + x+2 + x+3 + \dots + x+100 = 605x$	0,25
		$100x + \frac{(1+100) \cdot 100}{2} = 605x$	0,25

		$100x + \frac{(1+100).100}{2} = 605x$ $\Rightarrow 505x = 5050$ $\Rightarrow x = 10$ KL:	0,25
Câu 2 (4 điểm)	a	Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có $\frac{2x-1}{5} = \frac{3y-2}{3} = \frac{6x-3}{15} = \frac{6y-4}{6} = \frac{6x-3+6y-4}{15+6} = \frac{6(x+y)-7}{21}$	0,5
		$= \frac{6.2-7}{21} = \frac{5}{21} \text{ (vì } x+y=2)$	0,25
		$\begin{cases} \frac{2x-1}{5} = \frac{5}{21} \\ \frac{3y-2}{3} = \frac{5}{21} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 42x-21=25 \\ 63y-42=15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 42x=46 \\ 63y=57 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{23}{21} \\ y=\frac{57}{63} \end{cases}$	0,5
		Vậy $\begin{cases} x=\frac{23}{21} \\ y=\frac{57}{63} \end{cases}$	0,25
	b	Từ $\frac{xy}{ay+bx} = \frac{yz}{bz+cy} = \frac{zx}{cx+az}$ $\Rightarrow \frac{xyz}{ayz+bxz} = \frac{yzx}{bzx+cyx} = \frac{zxy}{cxy+azy}$ (vì x, y, z là các số khác 0)	0,25
		$\begin{cases} ayz+bxz = bzx+cyx \\ bzx+cyx = cxy+azy \\ ayz+bxz = cxy+azy \end{cases}$	0,25
		$\Rightarrow \begin{cases} ayz = cyx \\ bzx = azy \\ bxz = cxy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} az = cx \\ bx = ay \\ bz = cy \end{cases} \text{ (vì x, y, z là các số khác 0)}$	0,25
		$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{a} = \frac{z}{c} \\ \frac{y}{b} = \frac{x}{a} \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \\ \frac{z}{c} = \frac{y}{b} \end{cases}$	0,25

		Đặt $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k \ (k \neq 0) \Rightarrow \begin{cases} x = ak \\ y = bk \\ z = ck \end{cases}$ thay vào đề bài ta có	0,25
		$\frac{ak.bk}{abk + bak} = \frac{(ak)^2 + (bk)^2 + (ck)^2}{a^2 + b^2 + c^2}$ $\Rightarrow \frac{k}{2} = \frac{k^2(a^2 + b^2 + c^2)}{a^2 + b^2 + c^2} = k^2$	0,5
		$k = 2k^2 \Rightarrow k(1 - 2k) = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$ vì $k \neq 0$	0,5
		$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}a \\ y = \frac{1}{2}b \\ z = \frac{1}{2}c \end{cases}$	0,25đ
Câu 3 (2 điểm)	a	Chứng minh rằng $\frac{10^{2021} + 539}{9}$ có giá trị là một số tự nhiên.	0,25
		Ta có $\frac{10^{2021} + 539}{9} = \frac{100...00000 + 539}{9} = \frac{100...00539}{9}$	
		Trong đó số 100...00539 là số có tổng các chữ số chia hết cho 9 nên số đó chia hết cho 9.	0,5
		Vậy $\frac{10^{2021} + 539}{9}$ có giá trị là một số tự nhiên	
	b	$A = x^{12} - x^9 + x^8 - x^7 + x^6 - x^3 + 1$ Ta có $x^{12}; x^8; x^6 \geq 0$ với mọi x (*)	0,25
		$\left. \begin{array}{l} x^{12} \geq x^9 \\ x^8 \geq x^7 \\ x^6 \geq x^3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x^{12} - x^9 \geq 0 \\ x^8 - x^7 \geq 0 \\ x^6 - x^3 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ suy ra}$	0,25
		$A = x^{12} - x^9 + x^8 - x^7 + x^6 - x^3 + 1 \geq 1 > 0$	
		+) Nếu $x \leq 0$ khi đó $-x^9; -x^7; -x^3 \geq 0$ kết hợp với (*) ta có $A = x^{12} - x^9 + x^8 - x^7 + x^6 - x^3 + 1 \geq 1 > 0$	0,25
		+) Nếu $0 < x < 1$ ta có $A = x^{12} - x^9 + x^8 - x^7 + x^6 - x^3 + 1 =$ $x^{12} + x^8 - x^9 + x^6 - x^7 + 1 - x^3 = x^{12} + x^8(1 - x) + x^6(1 - x) + 1 - x^3$ Vì $0 < x < 1$ nên $1 - x > 0, 1 - x^3 > 0$ kết hợp với (*) suy ra $A = x^{12} - x^9 + x^8 - x^7 + x^6 - x^3 + 1 > 0$	0,25

		Vậy đa thức đã cho không có nghiệm với mọi x	0,25
--	--	--	------

Câu 4 (8,0 điểm) Hình vẽ:



Câu a) $\triangle ABD$ là tam giác gì? Vì sao? (1,5 điểm)

Chứng minh $\triangle ABD$ có đường vuông góc AH đồng thời là đường trung tuyến ứng với cạnh BD suy ra $\triangle ABD$ cân tại A	0,75
Tính được góc $\hat{B} = 60^\circ$ suy ra $\triangle ABD$ cân có một góc bằng 60° là tam giác đều.	0,75

Câu b) Chứng minh $DH = DE$, $HE \parallel AC$ (2,5 điểm)

1,5	Tính được $\hat{C} = 30^\circ$ (1)	0,25
	Tính được $\widehat{CAD} = 30^\circ$ (2)	0,25
	Từ (1) và (2) suy ra $\triangle ADC$ cân tại D	0,25
	Suy ra $DA = DC$	0,25
	Chứng minh được $\triangle AHD = \triangle CED$ (cạnh huyền - góc nhọn)	0,25
	Suy ra $DH = DE$	0,25
1,0	Tính được $\widehat{ADC} = 120^\circ$ Ta có $\widehat{ADC} = \widehat{HDE}$ (đối đỉnh) Suy ra $\widehat{HDE} = 120^\circ$	0,25
	Tính được $\widehat{DHE} = 30^\circ$ (3)	0,25
	Từ (1), (3) suy ra $\widehat{ACD} = \widehat{DHE}$	0,25

Ta có $\left. \begin{array}{l} \widehat{ACD} = \widehat{DHE} \text{ (cmt)} \\ \text{mà hai góc này ở vị trí so le trong} \end{array} \right\} \Rightarrow HE // AC$ (Dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song)	0,25
--	------

Câu c) (2,0 điểm) So sánh HE^2 và $(BC^2 - AD^2) : 4$

Chứng minh $\triangle AHE$ cân tại H (tam giác có 2 góc bằng 30°) Suy ra $HA = HE$ (4)	0,5
Trong góc $\widehat{AHC}$ kẻ tia Hx cắt AC tại M sao cho $\widehat{AHM} = 60^\circ$ Chứng minh được $\triangle HMC$ cân tại M Suy ra $MH = MC$ (5)	0,25
Chứng minh được $\triangle AHM$ đều Suy ra $AH = HM = MA$ (6)	0,25
Từ (4), (5) và (6) suy ra $HE = \frac{AC}{2} \Rightarrow HE^2 = \left(\frac{AC}{2}\right)^2$	0,25
Ta có lại có $\frac{BC^2 - AD^2}{4} = \frac{AB^2 + AC^2 - AD^2}{4}$ (vì $BC^2 = AB^2 + AC^2$) $= \frac{AC^2}{4} = \left(\frac{AC}{2}\right)^2$ (Vì $AB^2 = AD^2$)	0,5
Suy ra $HE^2 = \frac{BC^2 - AD^2}{4}$	0,25

Câu d) (2 điểm) Chứng minh $\frac{3}{2}AC < IA + IK + IC$

Chứng minh $\triangle KAC$ đều (tam giác có 2 góc bằng 60°) Suy ra $AK = KC = AC$	0,5
Xét $\triangle IKA$ có $IK + IA > AK$ (bất đẳng thức $\triangle$) Xét $\triangle IKC$ có $IK + IC > KC$ (bất đẳng thức $\triangle$) Xét $\triangle ICA$ có $IC + IA > AC$ (bất đẳng thức $\triangle$)	0,5
Suy ra $IK + IA + IK + IC + IC + IA > AK + KC + AC$	0,5

$\Rightarrow 2.IA + 2.IK + 2.IC > 3.AC$ (vì $AC = AK = KC$) $\Rightarrow 2.(IA + IK + IC) > 3.AC$ $\Rightarrow IA + IK + IC > \frac{3}{2}AC$. Vậy $\frac{3}{2}AC < IA + IK + IC$ (ĐPCM)	0,5
---	-----

Câu 5. Tìm x nguyên sao cho: $|x-1| + |x-2| + |x-3| + \dots + |x-90| = 2025$

Câu 5 (2,0 điểm)	$\left. \begin{array}{l} x-1 \geq x-1 ; \forall x \\ x-2 \geq x-2 ; \forall x \\ \dots\dots\dots \\ x-45 \geq x-45 ; \forall x \\ x-46 \geq 46-x ; \forall x \\ x-47 \geq 47-x ; \forall x \\ \dots\dots\dots \\ x-90 \geq 90-x ; \forall x \end{array} \right\}$	0,25
	$\Rightarrow x-1 + x-2 + x-3 + \dots + x-90 \geq$ $x-1 + x-2 + \dots + x-45 + 46-x + 47-x + \dots + 90-x ; \forall x$	0,25đ
	$\Rightarrow x-1 + x-2 + x-3 + \dots + x-2020 \geq -\frac{(1+45).45}{2} + \frac{(46+90).45}{2}$ $\Rightarrow x-1 + x-2 + x-3 + \dots + x-90 \geq 2025$	0,5đ
	Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\left. \begin{array}{l} x-1 = x-1 \\ x-2 = x-2 \\ \dots\dots\dots \\ x-45 = x-45 \\ x-46 = 46-x \\ x-47 = 47-x \\ \dots\dots\dots \\ x-90 = 90-x \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x-1 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \\ \dots\dots\dots \\ x-45 \geq 0 \\ x-46 \leq 0 \\ x-47 \leq 0 \\ \dots\dots\dots \\ x-90 \leq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 45 \leq x \leq 46$	0,5
	Mà x là số nguyên suy ra $x \in \{45; 46\}$	0,5đ

Chú ý: - Học sinh làm cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa.

