

Câu 1. Cho biểu thức $P = \left(1 - \frac{3}{1+\sqrt{x}}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x}-6}{x-5\sqrt{x}+6} + \frac{\sqrt{x}-2}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2}\right)$.

a. Rút gọn biểu thức P .

b. Tìm các giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên.

Câu 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , các đường thẳng $y=2$, $y=6$, $y=mx-2$ ($m \neq 0$) và trục tung cắt nhau, phần chung giữa chúng tạo thành một hình thang. Tìm m để diện tích hình thang đó bằng 4 đơn vị diện tích.

Câu 3. Tìm hằng số a, b, c sao cho $ax^3 + bx^2 + c$ chia hết cho $x+2$ và chia cho x^2-1 dư 5.

Câu 4. Giải phương trình $x^2 - 6x + 2 = 2(2-x)\sqrt{2x-1}$.

Câu 5. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x^2 - x + 2)y + x = 0 \\ (x^4 - 4x^2 - 1)y^2 + (2x^3 + x)y + x^2 = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Câu 6. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 3AD = 3a$. Trên cạnh DC lần lượt lấy hai điểm P, Q sao cho $DP = PQ = QC$. Chứng minh hai tam giác $\triangle PAQ$ và $\triangle PCA$ đồng dạng.

Câu 7. Trên một mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích $200m^2$, người chủ lấy một phần đất để trồng hoa. Biết phần đất trồng hoa là hình chữ nhật với hai đỉnh đối diện là A và H , với H thuộc đường chéo BD . Hỏi số tiền lớn nhất mà người chủ cần dùng để trồng hoa là bao nhiêu? Biết rằng chi phí trồng hoa là 50000 đồng/ m^2 .

Câu 8. Cho hình vuông $ABCD$ có M là một điểm tùy ý trên đường chéo AC . Kẻ ME vuông góc với AB tại E , MF vuông góc với BC tại F . Chứng minh ba đường thẳng AF, CE và MD đồng quy.

Câu 9. Cho nửa đường tròn đường kính AB , tâm O và bán kính R . Trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa nửa đường tròn đó vẽ tiếp tuyến Ax với nửa đường tròn, trên tia Ax lấy điểm M sao cho $AM > R$. Từ M vẽ tiếp tuyến MC tiếp xúc với nửa đường tròn đã cho tại điểm C . Từ điểm C vẽ CH vuông góc với AB tại H . Đường thẳng vuông góc với AB tại O cắt BC tại N .

a. Chứng minh tứ giác $MNCO$ là hình thang cân.

b. Đường thẳng MO cắt CA tại I , đường thẳng MB cắt CH tại K . Chứng minh IK song song với AB .

Câu 10. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh
$$\frac{1}{\sqrt{ab+a+2}} + \frac{1}{\sqrt{bc+b+2}} + \frac{1}{\sqrt{ca+c+2}} \leq \frac{3}{2}.$$