

**Câu I. (2,0 điểm)**

1. Rút gọn biểu thức  $A = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{27} + 7\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ .

2. Cho biểu thức  $P = \frac{1}{2\sqrt{x}-4} - \frac{1}{2\sqrt{x}+4} + \frac{\sqrt{x}}{x-4}$  (với  $x \geq 0, x \neq 4$ ).

a) Rút gọn biểu thức  $P$ .

b) Tìm tất cả các số nguyên  $x$  để  $P$  đạt giá trị nguyên.

**Câu II. (1,5 điểm)**

1. Giải phương trình  $x^2 + 2x - 15 = 0$ .

2. Giải hệ phương trình  $\begin{cases} x(4-2y) = 7 + y - 2xy \\ 2x - 14 = 2(y-3) \end{cases}$ .

**Câu III. (1,5 điểm)** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho parabol  $(P)$  có phương trình  $y = x^2$ , đường thẳng  $(d)$  có phương trình  $y = 2x + m^2 - 4m + 9$  (với  $m$  là tham số) và đường thẳng  $(\Delta)$  có phương trình  $y = (a-3)x + 4$  (với  $a$  là tham số).

1. Tìm  $a$  để đường thẳng  $(d)$  và đường thẳng  $(\Delta)$  vuông góc với nhau.

2. Chứng minh đường thẳng  $(d)$  luôn cắt parabol  $(P)$  tại hai điểm phân biệt  $A, B$  với mọi  $m$ . Gọi  $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$  (với  $x_1 < x_2$ ), tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  sao cho  $|x_1 - 2023| - |x_2 + 2023| = y_1 + y_2 - 48$ .

**Câu IV. (4,0 điểm)** Cho đường tròn  $(O)$ . Từ điểm  $M$  bên ngoài đường tròn kẻ hai tiếp tuyến  $MA, MB$  với đường tròn  $(O)$  ( $A, B$  là các tiếp điểm). Lấy điểm  $C$  trên cung nhỏ  $AB$  ( $C$  không nằm chính giữa cung  $AB$ ,  $C$  khác  $A$  và  $B$ ). Gọi  $D, E, F$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  $C$  trên các đường thẳng  $AB, AM, BM$ .

1. Chứng minh tứ giác  $AECD$  nội tiếp đường tròn.

2. Chứng minh rằng  $\widehat{CDE} = \widehat{CFD}$ .

3. Gọi  $I$  là giao điểm của  $AC$  và  $ED$ ,  $K$  là giao điểm của  $CB$  và  $DF$ . Chứng minh  $CD \perp IK$ .

4. Đường tròn ngoại tiếp hai tam giác  $CIE$  và  $CKF$  cắt nhau tại điểm thứ hai  $N$  ( $N$  khác  $C$ ). Chứng minh đường thẳng  $NC$  đi qua trung điểm của đoạn thẳng  $AB$ .

**Câu V. (1,0 điểm)** Cho  $a, b, c$  là các số không âm thỏa mãn  $a + b + c = 1011$ . Chứng minh:

$$\sqrt{2022a + \frac{(b-c)^2}{2}} + \sqrt{2022b + \frac{(c-a)^2}{2}} + \sqrt{2022c + \frac{(a-b)^2}{2}} \leq 2022\sqrt{2}.$$

--- HẾT ---

*Thí sinh được sử dụng máy tính bỏ túi không có chức năng soạn thảo văn bản và không có thẻ nhớ.*

Họ và tên thí sinh:.....Số báo danh:.....

Cán bộ coi thi số 1.....Cán bộ coi thi số 2.....

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

**HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN (ĐỀ CHUNG)**

**Ghi chú:**

- Điểm toàn bài không làm tròn.
- Các cách giải khác mà đúng cho điểm tương đương.

Nội dung	Điểm
<b>Câu I (2,0 điểm).</b>	
1. (1,0 điểm) Rút gọn biểu thức $A = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{27} + 7\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ .	
$A = 2\sqrt{3} - 9\sqrt{3} + 7\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}$	0,5
$A = 2\sqrt{3} - 9\sqrt{3} + 7(2+\sqrt{3})$	0,25
$A = 14$	0,25
2. (1,0 điểm) Cho biểu thức $P = \frac{1}{2\sqrt{x}-4} - \frac{1}{2\sqrt{x}+4} + \frac{\sqrt{x}}{x-4}$ (với $x \geq 0, x \neq 4$ ).	
a) (0,5 điểm) Rút gọn biểu thức $P$ .	
$P = \frac{8}{4x-16} + \frac{\sqrt{x}}{x-4}$	0,25
$P = \frac{\sqrt{x}+2}{x-4} = \frac{1}{\sqrt{x}-2}$	0,25
b) (0,5 điểm) Tìm tất cả các số nguyên $x$ để $P$ đạt giá trị nguyên.	
$P$ đạt giá trị nguyên $\Leftrightarrow \sqrt{x}-2 = \pm 1$	0,25
$\sqrt{x}-2 = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9$ (thỏa mãn điều kiện $x \geq 0, x \neq 4$ ).	0,25
$\sqrt{x}-2 = -1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn điều kiện $x \geq 0, x \neq 4$ ).	
<b>Câu II (1,5 điểm).</b>	
1. (0,75 điểm) Giải phương trình $x^2 + 2x - 15 = 0$ .	
$\Delta' = 1 + 15 = 16 > 0$	0,25
Phương trình có hai nghiệm phân biệt	
$x_1 = -1 + \sqrt{16} = 3$	0,25
$x_2 = -1 - \sqrt{16} = -5$	0,25
2. (0,75 điểm) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x(4-2y) = 7+y-2xy \\ 2x-14 = 2(y-3) \end{cases}$ .	
$\begin{cases} x(4-2y) = 7+y-2xy \\ 2x-14 = 2(y-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-y = 7 \\ 2x-2y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-y = 7 \\ x-y = 4 \end{cases}$	0,25
$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 3 \\ x-y = 4 \end{cases}$	0,25
$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$	0,25
Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (1; -3)$	

**Câu III. (1,5 điểm)** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho parabol  $(P)$  có phương trình  $y = x^2$ , đường thẳng  $(d)$  có phương trình  $y = 2x + m^2 - 4m + 9$  (với  $m$  là tham số) và đường thẳng  $(\Delta)$  có phương trình  $y = (a - 3)x + 4$  (với  $a$  là tham số).

1. (0,5 điểm) Tìm  $a$  để đường thẳng  $(d)$  và đường thẳng  $(\Delta)$  vuông góc với nhau.

$$(d) \perp (\Delta) \Leftrightarrow 2 \cdot (a - 3) = -1$$

0,25

$$\Leftrightarrow a = \frac{5}{2}.$$

0,25

2. (1,0 điểm) Chứng minh đường thẳng  $(d)$  luôn cắt  $(P)$  tại hai điểm phân biệt  $A, B$  với mọi  $m$ .

Gọi  $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$  (với  $x_1 < x_2$ ), tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  sao cho

$$|x_1 - 2023| - |x_2 + 2023| = y_1 + y_2 - 48.$$

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng  $(d)$  và  $(P)$

$$x^2 = 2x + m^2 - 4m + 9 \Leftrightarrow x^2 - 2x - m^2 + 4m - 9 = 0(1)$$

0,25

$$\Delta' = m^2 - 4m + 10 = (m - 2)^2 + 6 > 0 \forall m$$

0,25

Vậy đường thẳng  $(d)$  luôn cắt  $(P)$  tại hai điểm phân biệt  $A, B$  với mọi  $m$

$a.c = -m^2 + 4m - 9 = -(m - 2)^2 - 5 < 0 \forall m \Rightarrow$  Phương trình (1) luôn có hai nghiệm trái dấu  $x_1 < 0 < x_2$

0,25

$$\begin{cases} x_1 - 2023 < 0 \\ x_2 + 2023 > 0 \end{cases} \Rightarrow |x_1 - 2023| - |x_2 + 2023| = -(x_1 + x_2)$$

$$|x_1 - 2023| - |x_2 + 2023| = y_1 + y_2 - 48 \Leftrightarrow -(x_1 + x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 48$$

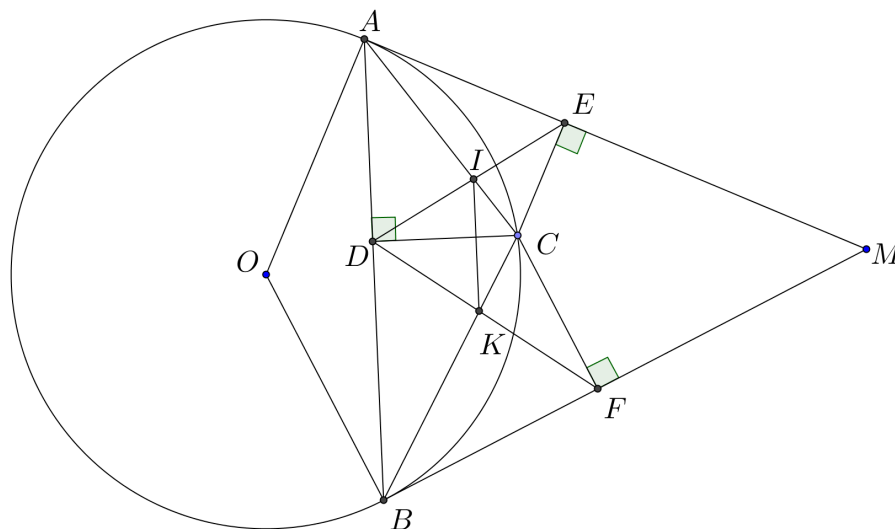
$$\Leftrightarrow -(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 - 48 \Leftrightarrow -2 = 2^2 - 2(-m^2 + 4m - 9) - 48$$

0,25

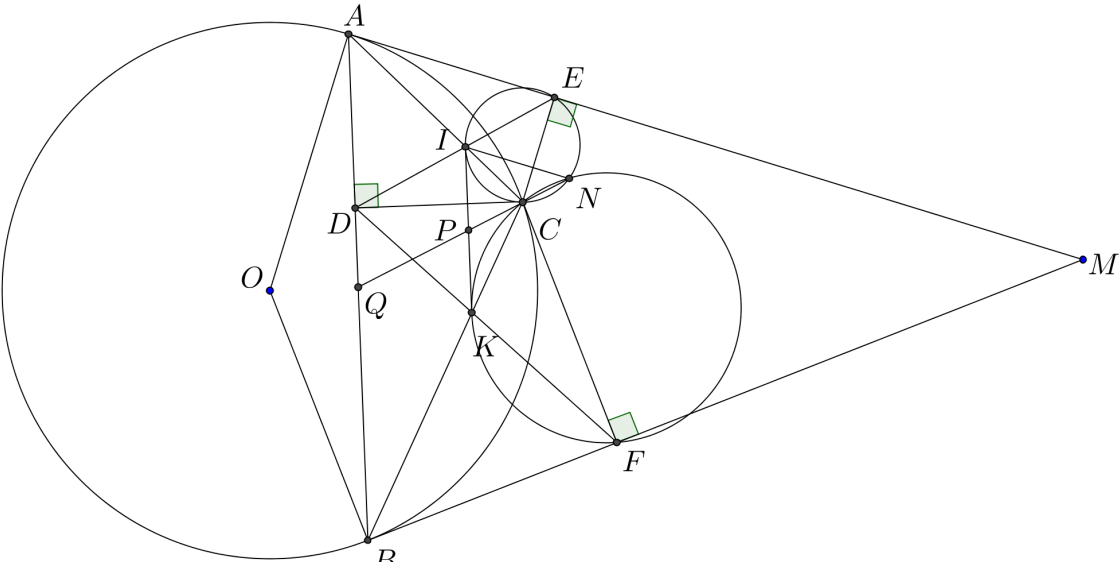
$$\Leftrightarrow m^2 - 4m - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 6 \\ m = -2 \end{cases}.$$

**Câu IV. (4,0 điểm)** Cho đường tròn  $(O)$ . Từ điểm  $M$  bên ngoài đường tròn kẻ hai tiếp tuyến

$MA, MB$  với đường tròn  $(O)$  ( $A, B$  là các tiếp điểm). Lấy điểm  $C$  bất kì trên cung nhỏ  $AB$  ( $C$  khác  $A$  và  $B$ ). Gọi  $D, E, F$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  $C$  trên các  $AB, AM, BM$ .



1. (1,0 điểm) Chứng minh tứ giác  $AECD$  nội tiếp đường tròn.

$DC \perp AD \Rightarrow \widehat{ADC} = 90^\circ$	0,25
$AE \perp EC \Rightarrow \widehat{AEC} = 90^\circ$	0,25
$\widehat{ADC} + \widehat{AEC} = 180^\circ$	0,25
$\Rightarrow$ Tứ giác $AECD$ nội tiếp đường tròn.	0,25
<b>2. (1,0 điểm)</b> Chứng minh rằng $\widehat{CDE} = \widehat{CFD}$ .	
Tứ giác $AECD$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CDE} = \widehat{CAE}$ .	0,25
$\widehat{CDB} + \widehat{CFB} = 180^\circ \Rightarrow$ Tứ giác $CDBF$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CFD} = \widehat{CBD}$ .	0,25
Mà $\widehat{CBD} = \widehat{CAE}$ ( Cùng chắn cung $AC$ )	0,25
$\Rightarrow \widehat{CDE} = \widehat{CFD}$ .	0,25
<b>3. (1,0 điểm)</b> Gọi $I$ là giao điểm của $AC$ và $ED$ , $K$ là giao điểm của $CB$ và $DF$ . Chứng minh $CD \perp IK$ .	
Tứ giác $CDBF$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CFD} = \widehat{CBD}$ . $\widehat{CDE} = \widehat{CFD}$ (Chứng minh trên) $\Rightarrow \widehat{CDE} = \widehat{CBD}$ hay $\widehat{CDI} = \widehat{CBA}$ (1)	0,25
Tứ giác $CDBF$ nội tiếp $\widehat{CDF} = \widehat{CBF}$ Mà $\widehat{CBF} = \widehat{CAB}$ ( Cùng chắn cung $BC$ ) $\Rightarrow \widehat{CDK} = \widehat{CAB}$ (2)	
Từ (1), (2) $\Rightarrow \widehat{ICK} + \widehat{IDK} = \widehat{ICK} + \widehat{IDC} + \widehat{CDK} = \widehat{ACB} + \widehat{CBA} + \widehat{CAB} = 180^\circ$ $\Rightarrow$ Tứ giác $CIDK$ nội tiếp	0,25
Suy ra $\widehat{CIK} = \widehat{CDK}$ Mà $\widehat{CDK} = \widehat{CAB}$ (Chứng minh trên) $\Rightarrow \widehat{CIK} = \widehat{CAB}$ $\Rightarrow IK \parallel AB$	0,25
Mà $CD \perp AB \Rightarrow CD \perp IK$ .	0,25
<b>4. (1,0 điểm)</b> Đường tròn ngoại tiếp hai tam giác $CIE$ và $CKF$ cắt nhau tại điểm thứ hai là $N$ . Chứng minh đường thẳng $NC$ đi qua trung điểm của đoạn thẳng $AB$ .	
 <p>Gọi <math>NC</math> cắt <math>IK, AB</math> lần lượt tại <math>P, Q</math> <math>\widehat{CIK} = \widehat{CAB}</math> (Chứng minh trên). Tứ giác <math>AECD</math> nội tiếp đường tròn <math>\Rightarrow \widehat{CAD} = \widehat{CED}</math> hay <math>\widehat{CAB} = \widehat{CEI}</math></p>	

$\Rightarrow \widehat{CEI} = \widehat{CIK}$ $\Rightarrow IK$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác $CIE$ Chứng minh tương tự: $IK$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác $CKF$	0,25
Xét hai tam giác $PIC, PNI$ có $\widehat{IPN}$ chung, $\widehat{PIC} = \widehat{PNI}$ (cùng chắn cung $IC$ ) $\Rightarrow \Delta PIC \sim \Delta PNI$	0,25
$\Rightarrow \frac{PI}{PN} = \frac{PC}{PI} \Rightarrow PI^2 = PC \cdot PN$ Chứng minh tương tự: $PK^2 = PC \cdot PN$ Vậy $PI = PK$	0,25
$IK \parallel AB \Rightarrow \frac{IP}{AQ} = \frac{CP}{CQ} = \frac{PK}{QB}$ Mà $PI = PK \Rightarrow AQ = QB$ Hay $Q$ là trung điểm của $AB$	0,25
<b>Câu V. (1,0 điểm)</b> Cho $a, b, c$ là các số không âm thỏa mãn $a + b + c = 1011$ . Chứng minh rằng:	
$\sqrt{2022a + \frac{(b-c)^2}{2}} + \sqrt{2022b + \frac{(c-a)^2}{2}} + \sqrt{2022c + \frac{(a-b)^2}{2}} \leq 2022\sqrt{2}$	
Ta có: $\sqrt{2022a + \frac{(b-c)^2}{2}} = \sqrt{2022a + \frac{(b+c)^2}{2} - 2bc} \leq \sqrt{2022a + \frac{(b+c)^2}{2}} \quad (\text{vì } bc \geq 0)$ $\Rightarrow \sqrt{2022a + \frac{(b-c)^2}{2}} \leq \sqrt{2022a + \frac{(1011-a)^2}{2}}$	0,25
$\Rightarrow \sqrt{2022a + \frac{(b-c)^2}{2}} \leq \sqrt{\frac{(1011+a)^2}{2}}$ $\Rightarrow \sqrt{2022a + \frac{(b-c)^2}{2}} \leq \frac{1011+a}{\sqrt{2}} \quad \text{đấu} = \text{xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} bc = 0 \\ a + b + c = 1011 \end{cases}$	0,25
Tương tự: $\sqrt{2022b + \frac{(c-a)^2}{2}} \leq \frac{1011+b}{\sqrt{2}}$ $\sqrt{2022c + \frac{(c-b)^2}{2}} \leq \frac{1011+c}{\sqrt{2}}$	0,25
$\sqrt{2022a + \frac{(b-c)^2}{2}} + \sqrt{2022b + \frac{(c-a)^2}{2}} + \sqrt{2022c + \frac{(a-b)^2}{2}} \leq \frac{3 \cdot 1011 + a + b + c}{\sqrt{2}}$ $\Rightarrow \sqrt{2022a + \frac{(b-c)^2}{2}} + \sqrt{2022b + \frac{(c-a)^2}{2}} + \sqrt{2022c + \frac{(a-b)^2}{2}} \leq \frac{4 \cdot 1011}{\sqrt{2}} = 2022\sqrt{2}$ $\text{Đấu} = \text{xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 1011 \\ ab = bc = ca = 0 \end{cases}$ (Khi trong ba số $a, b, c$ có một số bằng 1011 và hai số bằng 0).	0,25