

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

**PHẦN I: TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN (8 điểm).****Chọn phương án trả lời đúng****Câu 1:** Cho  $x^2 + x = 1$ . Giá trị biểu thức  $Q = x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$  bằng

- A. 1.                      B. 2.                      C. 3.                      D. 4.

**Câu 2:** Số dư trong phép chia  $(x + 3)(x + 5)(x + 7)(x + 9) + 2038$  cho  $x^2 + 12x + 30$  bằng

- A. 1.                      B. 2038.                      C. 0.                      D. 2023.

**Câu 3:** Giá trị của phân thức  $A = \frac{x^2 + ax^2 + a + a^2 + a^2x^2 + 1}{x^2 - ax^2 - a + a^2 + a^2x^2 + 1}$  tại  $x = 2023^{2022}$  và  $a = 5$  bằng

- A.  $-\frac{5}{4}$ .                      B.  $\frac{31}{21}$ .                      C.  $\frac{2019}{5}$ .                      D.  $\frac{5}{2023^{2022}}$ .

**Câu 4:** Phân thức  $A = \frac{-12}{x^2 - 4x + 6}$  có giá trị nhỏ nhất khi giá trị của  $x$  bằng:

- A.  $-2$ .                      B.  $4$ .                      C.  $2$ .                      D.  $-2$  và  $1$ .

**Câu 5:** Giá trị biểu thức  $C = \frac{a}{1 + a + ab} + \frac{b}{1 + b + bc} + \frac{c}{1 + c + ca}$  với  $abc = 1$  bằng

- A.  $-1$ .                      B.  $2$ .                      C.  $-2$ .                      D.  $1$ .

**Câu 6:** Tổng các nghiệm của phương trình  $(x + 2)(3 - 4x) + (x^2 + 4x + 4) = 0$  là

- A.  $-\frac{1}{3}$ .                      B.  $\frac{1}{3}$ .                      C.  $-\frac{11}{3}$ .                      D.  $\frac{11}{3}$ .

**Câu 7:** Cho phương trình  $\frac{x - m}{x + 5} + \frac{x - 5}{x + m} = 2$  (ẩn  $x$ , tham số  $m$ ). Điều kiện của  $m$  để phương trình có một nghiệm duy nhất là

- A.  $m = -5$ .                      B.  $m \neq -5$ .                      C.  $m \neq \pm 5$ .                      D.  $m = 5$ .

**Câu 8:** Số nghiệm của phương trình:  $(x + 3)^3 - (x + 1)^3 = 36$  là:

- A. 1.                      B. 4.                      C. 2.                      D. 3.

**Câu 9:** Cho hình chữ nhật  $ABCD$ , dựng  $AH$  vuông góc với  $BD$  ( $H \in BD$ ) biết  $HD = 9\text{ cm}$  và  $HB = 16\text{ cm}$ . Diện tích hình chữ nhật  $ABCD$  bằng

- A.  $300\text{ cm}^2$ .                      B.  $280\text{ cm}^2$ .                      C.  $302\text{ cm}^2$ .                      D.  $310\text{ cm}^2$ .

**Câu 10:** Cho hình bình hành  $ABCD$ , dựng  $AE$  vuông góc với  $CD$  và  $AF$  vuông góc với  $CB$  ( $E; F$  thứ tự thuộc các cạnh  $CD$  và  $BC$ ), Biết  $AC = 25\text{ cm}$  và  $EF = 24\text{ cm}$ . Khoảng cách từ  $A$  đến trục tâm  $H$  của tam giác  $AEF$  bằng

- A.  $5\text{ cm}$ .      B.  $7\text{ cm}$ .      C.  $8\text{ cm}$ .      D.  $1\text{ cm}$ .

**Câu 11:** Cho hình thang  $ABDC$  ( $AB \parallel CD$ ) có đường trung bình bằng  $7\text{ cm}$ ; độ dài đáy  $AB = 4\text{ cm}$  khi đó đáy  $CD$  bằng

- A.  $4\text{ cm}$ .      B.  $10\text{ cm}$ .      C.  $7\text{ cm}$ .      D.  $18\text{ cm}$ .

**Câu 12:** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 6\text{ cm}$ ,  $AC = 8\text{ cm}$ . Các đường trung tuyến  $BD$  và  $CE$  vuông góc với nhau. Độ dài  $BC$  là

- A.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .      B.  $2\sqrt{5}$ .      C.  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ .      D.  $\frac{\sqrt{5}}{3}$ .

**Câu 13:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ ; đường cao  $AH$  vuông góc với  $BC$ , ( $H \in BC$ ). Biết  $HB = 9\text{ cm}$ ,  $HC = 16\text{ cm}$ . Độ dài cạnh  $AB, AC$  lần lượt là

- A.  $15\text{ cm}$  và  $20\text{ cm}$ .      B.  $12\text{ cm}$  và  $23\text{ cm}$ .      C.  $14\text{ cm}$  và  $21\text{ cm}$ .      D.  $18\text{ cm}$  và  $17\text{ cm}$ .

**Câu 14:** Trong tam giác  $ABC$ , đường trung tuyến  $AM$  ( $M \in BC$ ),  $K$  là một điểm nằm trên

đoạn thẳng  $AM$  sao cho  $\frac{AK}{KM} = \frac{1}{2}$ ,  $BK$  cắt  $AC$  ở  $N$ . Biết diện tích tam giác  $ABC$  bằng  $60\text{ cm}^2$ , khi đó diện tích tam giác  $AKN$  là

- A.  $20\text{ cm}^2$ .      B.  $30\text{ cm}^2$ .      C.  $3\text{ cm}^2$ .      D.  $2\text{ cm}^2$ .

**Câu 15.** Số bàn thắng ghi được trong mỗi trận đấu (không tính loạt sút luân lưu) của một giải bóng đá được ghi lại trong bảng sau:

|              |   |   |   |   |   |   |
|--------------|---|---|---|---|---|---|
| Số bàn thắng | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Số trận      | 4 | 7 | 8 | 9 | 2 | 2 |

Hỏi trong giải đấu đó có thể có nhiều nhất bao nhiêu trận đấu kết thúc với tỉ số hòa (trong 90 phút thi đấu chính thức)?

- A. 32.      B. 4.      C. 7.      D. 14.

**Câu 16:** Trong một kì thi Hội khỏe Phù Đồng trường A có 12 học sinh giành được các giải thưởng, trong đó: 7 học sinh giành được ít nhất 2 giải, 4 học sinh giành được ít nhất 3 giải, 2 học sinh giành được số giải nhiều nhất, mỗi em 4 giải. Số giải trường A giành được là:

- A. 26.      B. 25.      C. 24.      D. 23.

## II. PHẦN TỰ LUẬN (12,0 điểm)

**Câu 1. (3,0 điểm)**

a) Tìm tất cả các số tự nhiên  $n$  để  $B = n^4 - 27n^2 + 121$  là số nguyên tố

b) Giải phương trình nghiệm nguyên sau:  $x^2 + 4x + 1 = y^4$ .

c) Biết  $a, b$  là các số nguyên dương thỏa mãn  $a^2 - ab + b^2$  chia hết cho 9, chứng minh rằng cả  $a$  và  $b$  đều chia hết cho 3.

**Câu 2. (4,0 điểm)**

a) Cho hai số thực khác nhau  $a, b$  thỏa mãn:  $\frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} = \frac{2}{1 + ab}$ ,

Tính giá trị của biểu thức:  $M = \frac{1}{a^{2023} + 1} + \frac{1}{b^{2023} + 1}$ .

b) Giải phương trình  $\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^2 + 6\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^2 - \frac{7(x^2-9)}{x^2-4} = 0$ .

c) Tìm  $a, b$  để  $f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4$  chia hết cho đa thức  $g(x) = x^2 + x - 2$ .

**Câu 3. (4 điểm)** Cho tam giác  $ABC$  có ba góc nhọn, các đường cao  $BD$  và  $CE$  cắt nhau ở  $H$ .

a) Chứng minh:  $\triangle ABD \sim \triangle ACE$

b) Chứng minh:  $CH.CE = CD.CA$

c) Kẻ  $EK \perp AC$  tại  $K$ ;  $DI \perp EC$  tại  $I$ . Chứng minh  $AH \parallel IK$

d) Chứng minh  $S_{\triangle EIK} \leq \frac{1}{4} S_{\triangle ABC}$

**Câu 4 (1 điểm).** Cho  $x, y$  là các số dương thỏa mãn điều kiện  $x + y \geq 6$ . Tìm giá trị nhỏ nhất

của biểu thức  $M = 3x + 2y + \frac{6}{x} + \frac{8}{y}$ .

*Thí sinh không được sử dụng tài liệu*

*Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm!!!*

----- Hết-----

Họ và tên: .....

SBD:.....

SỞ GD&ĐT PHÚ THỌ

Đề chính thức

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI  
NĂM HỌC 2022-2023

Môn: Toán 8

Thời gian làm bài: 150 phút  
(không kể thời gian giao đề)

HƯỚNG DẪN CHẤM

(Mỗi câu trả lời đúng được 0,5 điểm)

| Câu | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|
| Đ.A | D | D | B | C | D | A | C | C | A | B  | C  | B  | A  | D  | D  | C  |

Hướng dẫn chi tiết

Câu 1: Cho  $x^2 + x = 1$ . Giá trị biểu thức  $Q = x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$  là

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

Lời giải

Ta có  $x^2 + x = 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0$ .

Ta có

$$Q = x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$$

$$Q = x^4(x^2 + x - 1) + x^3(x^2 + x - 1) + 2x^2(x^2 + x - 1) + x(x^2 + x - 1) + 3(x^2 + x - 1) + 4 = 4$$

Chọn D.

Câu 2: Số dư trong phép chia  $(x + 3)(x + 5)(x + 7)(x + 9) + 2038$  cho  $x^2 + 12x + 30$  là

A. 1

B. 2038

C. 0

D. 2023

Lời giải

$$\text{Ta có: } (x + 3)(x + 5)(x + 7)(x + 9) + 2035 = (x^2 + 12x + 27)(x^2 + 12x + 35) + 2035$$

$$\text{Đặt } x^2 + 12x + 30 = a$$

$$\text{ta có } (x^2 + 12x + 27)(x^2 + 12x + 35) + 2035 = a^2 + 2a + 2023$$

Chọn D.

Câu 3: Giá trị của phân thức  $A = \frac{x^2 + ax^2 + a + a^2 + a^2x^2 + 1}{x^2 - ax^2 - a + a^2 + a^2x^2 + 1}$  tại  $x = 2023^{2022}$  và  $a = 5$  là:

A.  $-\frac{5}{4}$

B.  $\frac{31}{21}$

C.  $\frac{2019}{5}$

D.  $\frac{5}{2023^{2022}}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = \frac{x^2 + ax^2 + a + a^2 + a^2x^2 + 1}{x^2 - ax^2 - a + a^2 + a^2x^2 + 1} = \frac{(x^2 + 1)(a^2 + a + 1)}{(x^2 + 1)(a^2 - a + 1)} = \frac{a^2 + a + 1}{a^2 - a + 1}.$$

**Chọn B.**

**Câu 4:** Phân thức  $A = \frac{-12}{x^2 - 4x + 6}$  có giá trị nhỏ nhất khi giá trị của  $x$  bằng:

A. -2

B. 4

**C. 2**

D. -2 và 1

**Lời giải**

Ta có:  $A = \frac{-12}{x^2 - 4x + 6} = \frac{-12}{(x-2)^2 + 2}$ . **Chọn C.**

**Câu 5:** Giá trị biểu thức  $C = \frac{a}{1+a+ab} + \frac{b}{1+b+bc} + \frac{c}{1+c+ca}$  (với  $abc = 1$ ) là :

A. -1

B. 2

C. -2

**D. 1**

**Lời giải**

Ta có:

$$\begin{aligned} C &= \frac{a}{1+a+ab} + \frac{b}{1+b+bc} + \frac{c}{1+c+ca} = \frac{a}{abc+a+ab} + \frac{b}{1+b+bc} + \frac{bc}{b+bc+bca} \\ &= \frac{1}{bc+b+1} + \frac{b}{1+b+bc} + \frac{bc}{1+b+bc} = 1. \text{ **Chọn D.** } \end{aligned}$$

**Câu 6:** Tổng các nghiệm của phương trình  $(x+2)(3-4x) + (x^2 + 4x + 4) = 0$  là

**A.  $-\frac{1}{3}$**

B.  $\frac{1}{3}$

C.  $-\frac{11}{3}$

D.  $\frac{11}{3}$

**Lời giải**

Ta có:  $(x+2)(3-4x) + (x^2 + 4x + 4) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 - x + 10 = 0$ . **Chọn A.**

**Câu 7:** Cho phương trình  $\frac{x-m}{x+5} + \frac{x-5}{x+m} = 2$  (ẩn  $x$ , tham số  $m$ ). Điều kiện của  $m$  để phương trình có một nghiệm duy nhất là

A.  $m = -5$

B.  $m \neq -5$

**C.  $m \neq \pm 5$**

D.  $m = 5$

**Lời giải**

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \neq -5 \\ x \neq -m \end{cases}.$$

$$\frac{x-m}{x+5} + \frac{x-5}{x+m} = 2 \Leftrightarrow 2x(m+5) + m^2 + 10m + 25 = 0.$$

$$\text{Để phương trình có nghiệm duy nhất thì } \begin{cases} m \neq -5 \\ -5 \neq \frac{-m-5}{2} \\ -m \neq \frac{-m-5}{2} \end{cases} \Rightarrow m \neq \pm 5. \text{ **Chọn C.** }$$

**Câu 8:** Số nghiệm của phương trình:  $(x+3)^3 - (x+1)^3 = 36$  là:

A. 1

B. 4

C. 2

D. 3

**Lời giải**

$$(x+3)^3 - (x+1)^3 = 36 \Leftrightarrow 6x^2 + 24x - 10 = 0. \text{ Chọn C.}$$

**Câu 9:** Cho hình chữ nhật  $ABCD$ , dựng  $AH$  vuông góc với  $BD$  ( $H \in BD$ ) biết  $HD = 9\text{ cm}$  và  $HB = 16\text{ cm}$ . Diện tích hình chữ nhật  $ABCD$  là

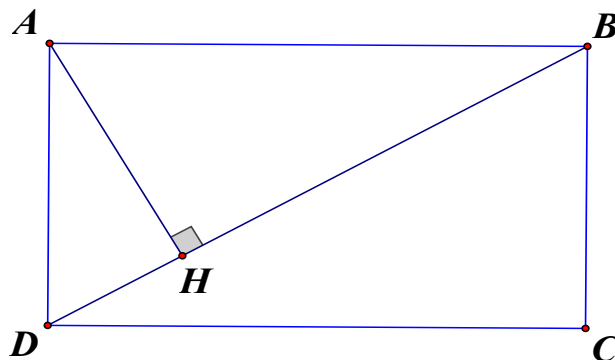
A.  $300\text{ cm}^2$

B.  $280\text{ cm}^2$

C.  $302\text{ cm}^2$

D.  $310\text{ cm}^2$

**Lời giải**



Ta có  $AH^2 = HD \cdot HB \Rightarrow AH = 12 \Rightarrow S_{ABCD} = 2S_{\triangle ADB} = 300$ . **Chọn A.**

**Câu 10:** Cho hình bình hành  $ABCD$ , dựng  $AE$  vuông góc với  $CD$  và  $AF$  vuông góc với  $CB$  ( $E; F$  thứ tự thuộc các cạnh  $CD$  và  $BC$ ), Biết  $AC = 25\text{ cm}$  và  $EF = 24\text{ cm}$ . Khoảng cách từ  $A$  đến trực tâm  $H$  của tam giác  $AEF$  là

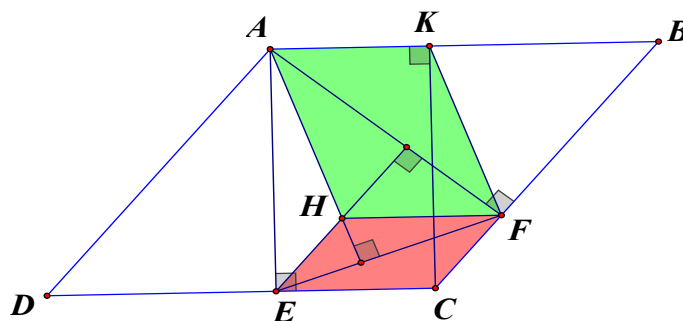
A.  $5\text{ cm}$

B.  $7\text{ cm}$

C.  $8\text{ cm}$

D.  $1\text{ cm}$

**Lời giải**



Dựng  $CK \perp AB$ , ta có  $AKCE$  là hình chữ nhật nên  $AC = EK$ ,  $CEHF$  và  $AHFK$

là hình bình hành và, nên  $AH = KF$ , Mặt khác  $\widehat{KFE} = 90^\circ$ , theo Pytago ta có:

$$KF = \sqrt{EK^2 - EF^2} = 7. \text{ Chọn B.}$$

**Câu 11:** Cho hình thang  $ABDC$  ( $AB \parallel CD$ ) có đường trung bình bằng  $7\text{ cm}$ ; độ dài đáy  $AB = 4\text{ cm}$  khi đó đáy  $CD$  bằng

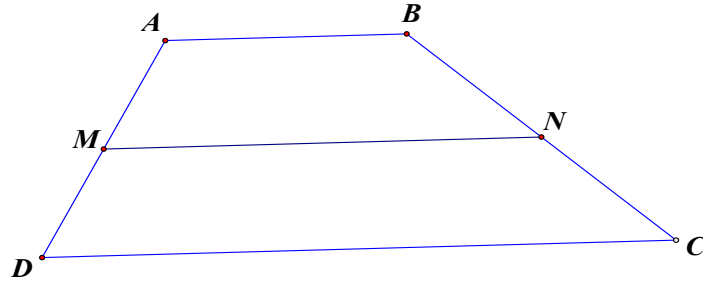
A.  $4\text{ cm}$

B.  $10\text{ cm}$

C.  $7\text{ cm}$

D.  $18\text{ cm}$

**Lời giải**



Ta có:  $DC = 2MN - AB = 10 \text{ cm}$ . **Chọn B.**

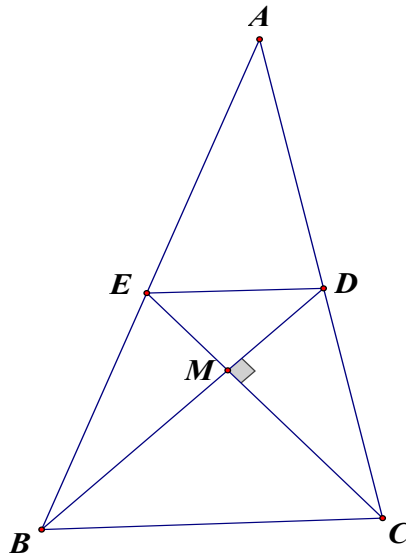
**Câu 12:** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 6 \text{ cm}$ ,  $AC = 8 \text{ cm}$ . Các đường trung tuyến  $BD$  và  $CE$  vuông góc với nhau. Độ dài  $BC$  là

A.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**B.  $2\sqrt{5}$ .**

C.  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ .

D.  $\frac{\sqrt{5}}{3}$ .



**Lời giải**

Đặt  $BD = x, CE = y \Rightarrow BM = \frac{2}{3}x, MD = \frac{x}{3}, CM = \frac{2}{3}y, ME = \frac{y}{3}$

Ta có  $EB = \frac{AB}{2}, DC = \frac{AC}{2}$ .

Theo Py ta go ta có:  $\frac{AB^2}{4} = \frac{y^2}{9} + \frac{4x^2}{9}, \frac{AC^2}{4} = \frac{4y^2}{9} + \frac{x^2}{9}$ .

$\Rightarrow \frac{AB^2}{4} + \frac{AC^2}{4} = \frac{5BM^2}{4} + \frac{5CM^2}{4} \Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = 5BC^2 \Rightarrow BC = 2\sqrt{5}$ . **Chọn B**

**Câu 13:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ ; đường cao  $AH$  vuông góc với  $BC$ , ( $H \in BC$ ). Biết  $HB = 9 \text{ cm}$ ,  $HC = 16 \text{ cm}$ . Độ dài cạnh  $AB, AC$  lần lượt là

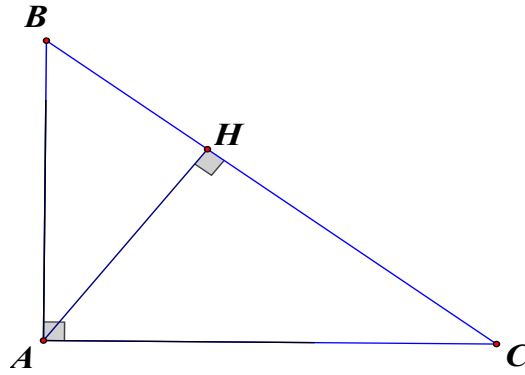
**A. 15cm và 20cm.**

B. 12 cm và 23cm.

C. 14cm và 21cm.

D. 18cm và 17cm.

**Lời giải**



Ta có  $AH^2 = HB.HC \Rightarrow AH = 12$ . Theo Pytago ta có  $AB = 15, AC = 20$ . **Chọn A.**

**Câu 14:** Trong tam giác  $ABC$ , đường trung tuyến  $AM$  ( $M \in BC$ ),  $K$  là một điểm nằm trên đoạn thẳng  $AM$  sao cho  $\frac{AK}{KM} = \frac{1}{2}$ ,  $BK$  cắt  $AC$  ở  $N$ . Biết diện tích tam giác  $ABC$  bằng  $60 \text{ cm}^2$ , khi đó diện tích tam giác  $AKN$  là

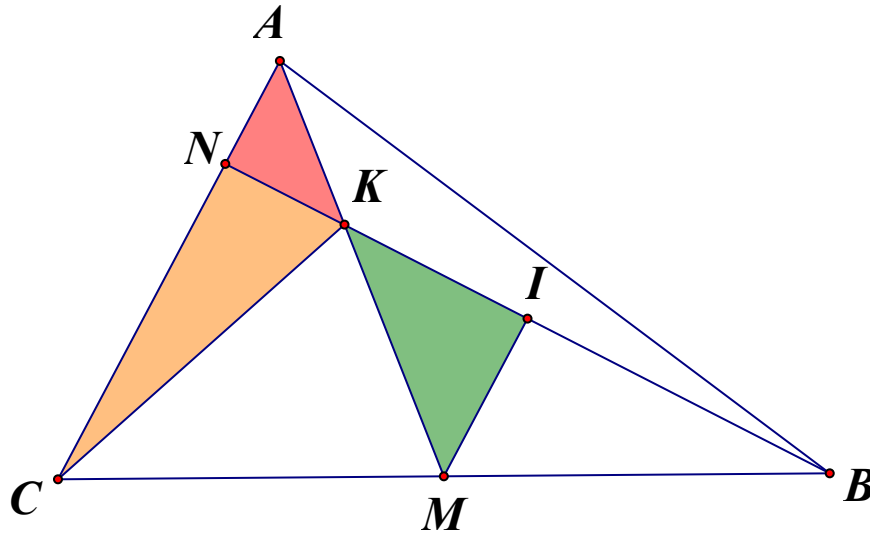
A.  $20 \text{ cm}^2$ .

B.  $30 \text{ cm}^2$ .

C.  $3 \text{ cm}^2$ .

**D.  $2 \text{ cm}^2$ .**

**Lời giải**



Ta có  $\triangle AKN \sim \triangle MKI$  (g-g) nên  $\frac{AK}{KM} = \frac{NK}{KI} = \frac{AN}{MI} = \frac{1}{2}$ .

Ta có  $MI = \frac{CN}{2} \Rightarrow \frac{AN}{AC} = \frac{1}{5}$ .

Ta có  $\frac{S_{\triangle ACM}}{S_{\triangle ACB}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow S_{\triangle ACB} = 2S_{\triangle ACM}$ ;  $\frac{S_{\triangle AKC}}{S_{\triangle AMC}} = \frac{AK}{AM} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow S_{\triangle AKC} = \frac{1}{3}S_{\triangle ACM}$ ;  $\frac{S_{\triangle AKN}}{S_{\triangle AKC}} = \frac{AN}{AC} = \frac{1}{5}$

Ta có:  $S_{\triangle ANK} = \frac{1}{5}S_{\triangle AKC} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3}S_{\triangle AMC} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}S_{\triangle ABC} = \frac{60}{30} = 2 (\text{cm}^2)$ . **Chọn D.**



**Câu 15.** Số bàn thắng ghi được trong mỗi trận đấu (không tính loạt sút luân lưu) của một giải bóng đá được ghi lại trong bảng sau:

|              |   |   |   |   |   |   |
|--------------|---|---|---|---|---|---|
| Số bàn thắng | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Số trận      | 4 | 7 | 8 | 9 | 2 | 2 |

Hỏi trong giải đấu đó có thể có nhiều nhất bao nhiêu trận đấu kết thúc với tỉ số hòa (trong 90 phút thi đấu chính thức)?

A. 32.

B. 4.

C. 7.

**D. 14.**

**Lời giải**

Số trận đấu kết thúc với tỉ số hòa thì số bàn thắng có thể là 0, 2, 4 vậy có thể có tối đa 14 trận hòa

**Chọn D.**

**Câu 16:** Trong một kì thi Hội khỏe Phù Đổng trường A có 12 học sinh giành được các giải thưởng, trong đó: 7 học sinh giành được ít nhất 2 giải, 4 học sinh giành được ít nhất 3 giải, 2 học sinh giành được số giải nhiều nhất, mỗi em 4 giải. Số giải trường A giành được là:

A. 26.

B. 25.

**C. 24 .**

D. 23.

**Lời giải**

Số học sinh được 4 giải là 2 em.

Số học sinh được dành được 3 giải là 2 em

Số học sinh được 2 giải là 3 em

Số học sinh được 1 giải là 4 em

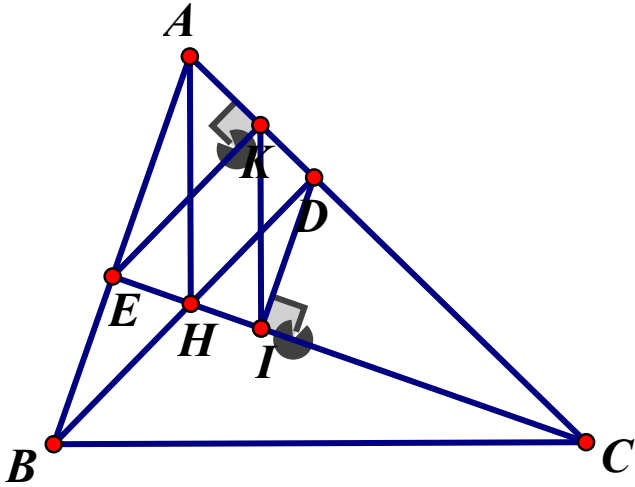
Vậy tổng số giải của trường A là: 24 giải . **Chọn C**

**Phần II: TỰ LUẬN (12 điểm)**

| Nội dung                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | Điểm       |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Câu 1 (3,0 điểm).</b><br>a) Tìm tất cả các số tự nhiên $n$ để $B = n^4 - 27n^2 + 121$ là số nguyên tố<br>b) Giải phương trình nghiệm nguyên sau: $x^2 + 4x + 1 = y^4$<br>c) Biết $a; b$ là các số nguyên dương thỏa mãn $a^2 - ab + b^2$ chia hết cho 9, chứng minh rằng cả $a$ và $b$ đều chia hết cho 3. | <b>3,0</b> |
| <b>a)</b> Tìm tất cả các số tự nhiên $n$ để $B = n^4 - 27n^2 + 121$ là số nguyên tố                                                                                                                                                                                                                           | <b>1,0</b> |
| Ta có $B = n^4 - 27n^2 + 121 = (n^4 + 22n^2 + 121) - 49n^2 = (n^2 + 11 + 7n)(n^2 + 11 - 7n)$                                                                                                                                                                                                                  | 0,25       |
| Với $n = 0$ , không thỏa mãn<br>Với $n \in N^*$ thì $n^2 + 11 + 7n > n^2 + 11 - 7n$                                                                                                                                                                                                                           | 0,25       |
| Do đó để $B$ là số nguyên tố thì điều kiện cần để $B$ là số nguyên tố là $n^2 - 7n + 11 = 1 \Leftrightarrow n = 5; n = 2$                                                                                                                                                                                     | 0,25       |
| Thử lại ta có $n = 5, n = 2$ thỏa mãn $B = n^4 - 27n^2 + 121$ là số nguyên tố.                                                                                                                                                                                                                                | 0,25       |
| <b>b)</b> Giải phương trình nghiệm nguyên sau: $x^2 + 4x + 1 = y^4$                                                                                                                                                                                                                                           | <b>1,0</b> |
| Ta có: $x^2 + 4x + 1 = y^4 \Leftrightarrow (x + 2)^2 - y^4 = 3 \Leftrightarrow (x + 2 - y^2)(x + 2 + y^2) = 3$                                                                                                                                                                                                | 0,25       |
| Do $x + 2 - y^2 \leq x + 2 + y^2$ nên ta có:<br>$\begin{cases} x + 2 - y^2 = -3 \\ x + 2 + y^2 = -1 \end{cases} \quad (I) \text{ hoặc } \begin{cases} x + 2 - y^2 = 1 \\ x + 2 + y^2 = 3 \end{cases} \quad (II)$                                                                                              | 0,5        |
| Từ (I) và (II) ta tìm được: $(x; y) \in \{(-4; -1), (-4; 1), (0; 1), (0; -1)\}$                                                                                                                                                                                                                               | 0,25       |
| <b>c)</b> Biết $a; b$ là các số nguyên dương thỏa mãn $a^2 - ab + b^2$ chia hết cho 9, chứng minh rằng cả $a$ và $b$ đều chia hết cho 3.                                                                                                                                                                      | <b>1,0</b> |
| Ta có: $(a^2 + ab + b^2):9 \Rightarrow 4(a^2 + ab + b^2):9 \Rightarrow [(2a - b)^2 + 3b^2]:9 \quad (1)$                                                                                                                                                                                                       | 0,25       |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |      |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Mà $3b^2 : 3$ nên $(2a-b)^2 : 3$ mà 3 là số nguyên tố nên $(2a-b) : 3$ nên $(2a-b)^2 : 9$ . (2)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 0,25 |
| Từ (1) và (2) $\Rightarrow 3b^2 : 9 \Rightarrow b^2 : 3$ mà 3 là số nguyên tố $\Rightarrow b : 3$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |      |
| $(2a-b) : 3$ và $b : 3 \Rightarrow 2a : 3$ mà $(2; 3) = 1$ nên $a : 3$ .<br>Vậy cả $a$ và $b$ đều chia hết cho 3.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 0,25 |
| <b>Câu 2.</b><br><br><b>a)</b> Cho hai số thực khác nhau $a, b$ thỏa mãn: $\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} = \frac{2}{1+ab}$ ,<br><br>Tính giá trị của biểu thức: $M = \frac{1}{a^{2023}+1} + \frac{1}{b^{2023}+1}$<br><br><b>b)</b> Giải phương trình $\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^2 + 6\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^2 - \frac{7(x^2-9)}{x^2-4} = 0$ .<br><br><b>c)</b> Tìm $a, b$ để $f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4$ chia hết cho đa thức $g(x) = x^2 + x - 2$ | 4,0  |
| <b>a)</b> Cho hai số thực khác nhau $a, b$ thỏa mãn: $\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} = \frac{2}{1+ab}$ ,<br><br>Tính giá trị của biểu thức: $M = \frac{1}{a^{2023}+1} + \frac{1}{b^{2023}+1}$                                                                                                                                                                                                                                                                   | 1,5  |
| Xét: $\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} = \frac{2}{1+ab} \Leftrightarrow \frac{1}{a^2+1} - \frac{1}{1+ab} + \frac{1}{b^2+1} - \frac{1}{1+ab} = 0$<br><br>$\Leftrightarrow \frac{1+ab-(a^2+1)}{(a^2+1)(1+ab)} + \frac{1+ab-(b^2+1)}{(b^2+1)(1+ab)} = 0 \Leftrightarrow \frac{ab-a^2}{(a^2+1)(1+ab)} + \frac{ab-b^2}{(b^2+1)(1+ab)} = 0$                                                                                                                             | 0,25 |
| $\Leftrightarrow \frac{a(b-a)}{(a^2+1)(1+ab)} + \frac{b(a-b)}{(b^2+1)(1+ab)} = 0 \Leftrightarrow \frac{a-b}{1+ab} \left( \frac{b}{b^2+1} - \frac{a}{a^2+1} \right) = 0$<br><br>$\Leftrightarrow \frac{a-b}{1+ab} \left( \frac{ba^2+b-(ab^2+a)}{(b^2+1)(a^2+1)} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{a-b}{1+ab} \left( \frac{ba^2+b-ab^2-a}{(b^2+1)(a^2+1)} \right) = 0$                                                                                               | 0,5  |
| $\Leftrightarrow \frac{a-b}{1+ab} \left( \frac{ab(a-b)-(a-b)}{(b^2+1)(a^2+1)} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{1+ab} \cdot \frac{ab-1}{(b^2+1)(a^2+1)} = 0$                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 0,5  |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |            |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| TH1: $a - b = 0 \Leftrightarrow a = b$ (Loại) vì $a \neq b$                                                                                                                                                                                                                                                                                  |            |
| TH2: $ab = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{b}$ thay vào biểu thức: $M = \frac{1}{a^{2023} + 1} + \frac{1}{b^{2023} + 1}$<br>$M = \frac{1}{\left(\frac{1}{b}\right)^{2023} + 1} + \frac{1}{b^{2023} + 1} = \frac{b^{2023}}{b^{2023} + 1} + \frac{1}{b^{2023} + 1} = \frac{b^{2023} + 1}{b^{2023} + 1} = 1.$                                    | 0,25       |
| <b>a)</b> Giải phương trình $\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^2 + 6\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^2 - \frac{7(x^2-9)}{x^2-4} = 0.$                                                                                                                                                                                                                 | <b>1,5</b> |
| ĐKXD: $x \neq \pm 2$<br>Đặt $\frac{x+3}{x-2} = a; \frac{x-3}{x+2} = b \Rightarrow ab = \frac{x+3}{x-2} \cdot \frac{x-3}{x+2} = \frac{x^2-9}{x^2-4}$ , ta có<br>$a^2 + 6b^2 - 7ab = 0 \Leftrightarrow (a-b)(a-6b) = 0 \Leftrightarrow a = b \text{ hoặc } a = 6b$                                                                             | 0,25       |
| Với $a = b$ ta có: $\frac{x+3}{x-2} = \frac{x-3}{x+2} \Rightarrow (x+3)(x+2) = (x-2)(x-3)$<br>$\Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 = x^2 - 5x + 6$<br>$\Leftrightarrow 10x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (thỏa mãn ĐKXD).                                                                                                                              | 0,5        |
| Với $a = 6b$ , ta có: $\frac{x+3}{x-2} = 6 \cdot \frac{x-3}{x+2} \Rightarrow (x+3)(x+2) = 6(x-2)(x-3)$<br>$\Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 = 6x^2 - 30x + 36 \Leftrightarrow 5x^2 - 35x + 30 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 = 0$<br>$\Leftrightarrow (x-1)(x-6) = 0$<br>$\Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn ĐKXD) hoặc $x = 6$ (thỏa mãn ĐKXD). | 0,5        |
| Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{0; 1; 6\}$                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 0,25       |
| <b>b)</b> Tìm $a, b$ để $f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4$ chia hết cho đa thức $g(x) = x^2 + x - 2$                                                                                                                                                                                                                                             | <b>1,0</b> |
| Ta có: $g(x) = x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2).$                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 0,25       |
| $f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4$ chia hết cho $g(x)$ nên<br>$\Leftrightarrow f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4 = (x-1)(x+2) \cdot Q(x)$                                                                                                                                                                                                             | 0,25       |
| Với $x = 1$ và $x = -2$ ta có $a + b = -6$ và $-8a + 4b - 24 = 0 \Rightarrow a = -4; b = -2$                                                                                                                                                                                                                                                 | 0,25       |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |      |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| <p>Vậy để <math>f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4</math> chia hết cho đa thức <math>g(x) = x^2 + x - 2</math> thì<br/> <math>a = -4; b = -2</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 0,25 |
| <p><b>Câu 3.</b> Cho tam giác <math>ABC</math> có ba góc nhọn, các đường cao <math>BD</math> và <math>CE</math> cắt nhau ở <math>H</math>.</p> <p>a) Chứng minh <math>\triangle ABD \hat{=} \triangle ACE</math></p> <p>b) Chứng minh <math>CH.CE = CD.CA</math></p> <p>c) Kẻ <math>EK \perp AC</math> tại <math>K</math>; <math>DI \perp EC</math> tại <math>I</math>. Chứng minh <math>AH \parallel IK</math></p> <p>d) Chứng minh <math>S_{\triangle EIK} \leq \frac{1}{4} S_{\triangle ABC}</math></p> | 4,0  |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |      |
| <p>a) Chứng minh <math>\triangle ABD \hat{=} \triangle ACE</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 1,0  |
| <p>Có <math>BD</math> là đường cao của tam giác <math>ABC</math><br/> <math>\Rightarrow BD \perp AC \Rightarrow \widehat{BDA} = \widehat{BDC} = 90^\circ</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 0,25 |
| <p>Có <math>CE</math> là đường cao của tam giác <math>ABC</math><br/> <math>\Rightarrow CE \perp AB \Rightarrow \widehat{CEB} = \widehat{CEA} = 90^\circ</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 0,25 |
| <p>Xét tam giác <math>\triangle ABD</math> &amp; <math>\triangle ACE</math> có<br/> <math>\widehat{BDA} = \widehat{CEA} = 90^\circ</math>.<br/> <math>\widehat{BAC}</math> chung</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 0,25 |
| <p><math>\Rightarrow \triangle ABD \hat{=} \triangle ACE (g.g)</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 0,25 |
| <p>b) Chứng minh <math>CH.CE = CD.CA</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 1,0  |
| <p>Xét tam giác <math>CHD</math> và tam giác <math>CHE</math> có</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 0,5  |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |            |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| $\left. \begin{array}{l} \widehat{ECA} \text{ chung} \\ \widehat{CDH} = \widehat{CEA} = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta CHD \hat{=} \Delta CAE (g.g)$                                                                                                                              |            |
| $\Rightarrow \frac{CH}{CA} = \frac{CD}{CE} \Rightarrow CH.CE = CD.CA$                                                                                                                                                                                                                               | 0,5        |
| <b>c) Kẻ <math>EK \perp AC</math> tại K; <math>DI \perp EC</math> tại I. Chứng minh <math>AH \parallel IK</math></b>                                                                                                                                                                                | <b>1,0</b> |
| Xét $\Delta CID$ và $\Delta CKE$ có: $\widehat{CID} = \widehat{CKE} = 90^\circ$ $\widehat{ICD}$ chung $\Rightarrow \Delta CID \hat{=} \Delta CKE$ (g-g)                                                                                                                                             | 0,25       |
| $\Rightarrow \frac{CI}{CK} = \frac{CD}{CE} \text{ (1) mà } CH.CE = CD.CA \text{ (cm b)} \Rightarrow \frac{CD}{CE} = \frac{CH}{CA} \text{ (2)}$                                                                                                                                                      | 0,25       |
| Từ (1), (2) $\Rightarrow \frac{CI}{CK} = \frac{CH}{CA} \Rightarrow \frac{CI}{CH} = \frac{CK}{CA}$<br>Xét $\Delta CAH$ có: $\frac{CI}{CH} = \frac{CK}{CA}$ (cmt)                                                                                                                                     | 0,25       |
| $\Rightarrow IK \parallel AH$ (ĐL Ta-lét đảo)                                                                                                                                                                                                                                                       | 0,25       |
| <b>d) Chứng minh <math>S_{\Delta EIK} \leq \frac{1}{4} S_{\Delta ABC}</math></b>                                                                                                                                                                                                                    | <b>1,0</b> |
| Có $IK \parallel AH$ (cm c) $\Rightarrow \widehat{KIE} = \widehat{AHE}$ (đồng vị)<br>Mà $\widehat{ABC} = \widehat{AHE}$ (cùng phụ với $\widehat{EAH}$ )<br>$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{KIE}$                                                                                              | 0,25       |
| Xét $\Delta EIK$ và $\Delta ABC$ có:<br>$\widehat{KIE} = \widehat{ABC}$ (cmt)<br>$\widehat{IEK} = \widehat{BAC}$ (cùng phụ với $\widehat{AEK}$ )<br>$\Rightarrow \Delta EIK \hat{=} \Delta ABC$ (g-g)<br>$\Rightarrow \frac{S_{EIK}}{S_{ABC}} = \left( \frac{EK}{AC} \right)^2 = \frac{EK^2}{AC^2}$ | 0,25       |
| Chứng minh: $\Delta AEK \hat{=} \Delta ECK$ (g-g)<br>$\Rightarrow \frac{AK}{EK} = \frac{EK}{CK} \Rightarrow EK^2 = AK.CK$                                                                                                                                                                           | 0,25       |
| $\Rightarrow \frac{S_{EIK}}{S_{ABC}} = \frac{AK.CK}{AC^2} = \frac{4AK.CK}{4AC^2} \leq \frac{(AK + CK)^2}{4AC^2} = \frac{AC^2}{4AC^2} = \frac{1}{4}$<br>Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow AK = CK$ .                                                                                                   | 0,25       |

|                                                                                                                                                                                         |            |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Câu 4. (1 điểm)</b> Cho $x, y$ là các số dương thỏa mãn điều kiện $x + y \geq 6$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = 3x + 2y + \frac{6}{x} + \frac{8}{y}$ .                    | <b>1,0</b> |
| Ta có $2M = 2\left(3x + 2y + \frac{6}{x} + \frac{8}{y}\right) = 3\left(x + y\right) + \left(3x + \frac{12}{x}\right) + \left(y + \frac{16}{y}\right)$                                   | 0,25       |
| Từ giả thiết và theo BĐT Cô – si, ta có:<br>$3(x + y) \geq 3.6 = 18; 3x + \frac{12}{x} \geq 2\sqrt{3x \cdot \frac{12}{x}} = 12; y + \frac{16}{y} \geq 2\sqrt{y \cdot \frac{16}{y}} = 8$ | 0,25       |
| Do đó, $2M \geq 18 + 12 + 8 = 38 \Rightarrow M \geq 19$                                                                                                                                 | 0,25       |
| Vậy $\min M = 19$ . Dấu “=” xảy ra khi $x = 2; y = 4$ .                                                                                                                                 | 0,25       |

*Chú ý: Nếu thí sinh làm cách khác mà đúng vẫn cho điểm tối đa*