

Câu 1: (4,0 điểm)

a) Cho p là số nguyên tố; $p \geq 5$.

Chứng minh rằng : Nếu $2p+1$ là số nguyên tố thì: $2p^2+1$ là hợp số.

b) Chứng minh $A = n(n+1)(n+2)(n+3)$ không là số chính phương với mọi số tự nhiên n khác 0.

Câu 2: (4,0 điểm)

a) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $2x^2 + 3y^2 + 4x = 19$

b) Giải phương trình: $5\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2-4} = \sqrt{5x^2+27x+25}$

Câu 3: (4,0 điểm)

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M = 4x^2 + 2y^2 - 4xy - 4x + 2023$

b) . Cho các số thực dương $x; y; z$ thỏa mãn $x + y + z = 1$.

$$\text{Chứng minh rằng } \frac{x}{x+yz} + \frac{y}{y+zx} + \frac{z}{z+xy} \leq \frac{9}{4}$$

Câu 4: (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, ba đường cao AK, BD, CE cắt nhau tại H .

a) Chứng minh: $BH \cdot BD = BC \cdot BK$ và $BH \cdot BD + CH \cdot CE = BC^2$.

b) Chứng minh $BH = AC \cdot \cot ABC$.

c) Gọi M là trung điểm của BC . Đường thẳng qua A vuông góc với AM cắt đường thẳng BD, CE lần lượt tại Q và P . Chứng minh rằng: $MP = MQ$.

Câu 5: (2,0 điểm)

Trong một buổi gặp mặt có 294 người tham gia, những người tham gia, những người quen nhau bắt tay nhau. Biết nếu A bắt tay B thì một trong hai người A và B bắt tay không quá 6 lần. Hỏi có nhiều nhất bao nhiêu cái bắt tay.

.....Hết.....

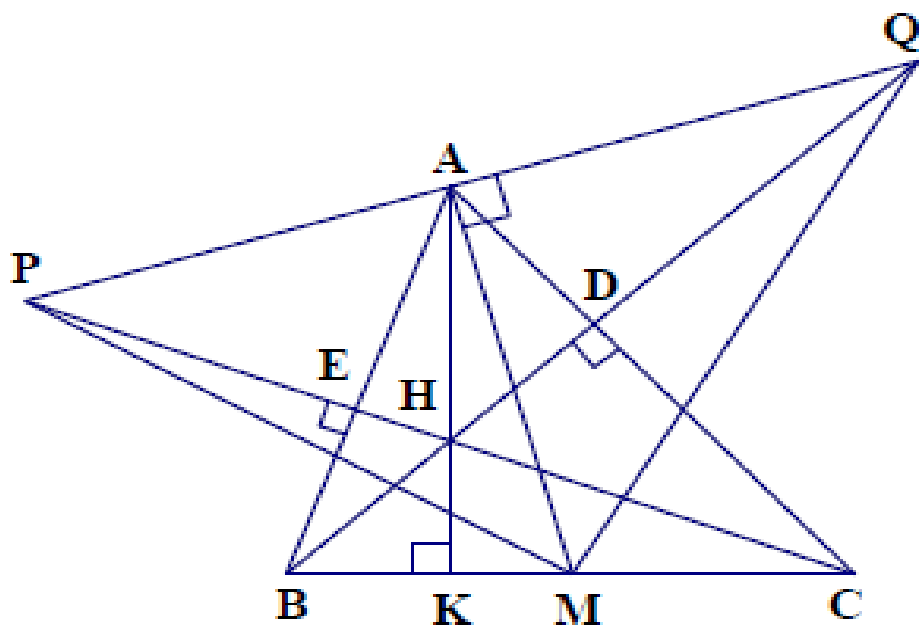
Họ và tên thí sinh:.....Số báo danh:.....

Môn thi: Toán 9

HƯỚNG DẪN CHẤM THI

Câu		ĐÁP ÁN	Điểm
1 (4,0đ)	a) (2,0đ)	a) Cho p là số nguyên tố; $p \geq 5$. Chứng minh rằng : Nếu $2p+1$ là số nguyên tố thì: $2p^2+1$ là hợp số.	
		Vì p là số nguyên tố; $p \geq 5$ nên p lẻ và p không chia hết cho 3	0,5
		Khi đó p chia cho 3 dư 1 hoặc 2	0,5
		Suy ra : $p = 3k+1, p = 3k+2$ (k thuộc $\mathbb{N}$) HS lập luận để chứng tỏ $2p^2+1$ là hợp số.	0,5
b) (2,0đ)	b) (2,0đ)	b) Chứng minh $A = n(n+1)(n+2)(n+3)$ không là số chính phương với mọi số tự nhiên n khác 0.	
		Ta có : $A = (n^2+3n)(n^2+3n+2) = (n^2+3n)^2 + 2(n^2+3n)$ $\Rightarrow A > (n^2+3n)^2$ với mọi $n \geq 1$ (1)	0,5
		$A+1 = (n^2+3n)^2 + 2(n^2+3n) + 1 = (n^2+3n+1)^2$. (2)	0,5
		Từ (1) và (2) suy ra: $(n^2+3n)^2 < A < A+1 = (n^2+3n+1)^2$. $\Rightarrow A$ không là số chính phương.	0,5
2 (4,0đ)	a) (2,0đ)	a) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $2x^2+3y^2+4x=19$	
		$2x^2+3y^2+4x=19 \Leftrightarrow 2(x^2+2x+1)=3(7-y^2) \Leftrightarrow 2(x+1)^2=3(7-y^2)$	0,5
		$\Leftrightarrow 3(7-y^2):2 \Leftrightarrow 7-y^2:2 \Leftrightarrow y$ là số nguyên lẻ	0,5
		Mà $2.(x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 7-y^2 \geq 0 \Leftrightarrow y^2=1$ HS tìm y rồi thay vào tìm x để tìm ra các cặp nghiệm: (2; 1); (2; -1); (-4; 1); (-4; -1)	0,5
b) (2,0đ)	b) (2,0đ)	b) Giải phương trình: $5\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2-4}=\sqrt{5x^2+27x+25}$	
		$5\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2-4}=\sqrt{5x^2+27x+25}$ ĐKXD $x \geq 2$ Bình phương cả hai vế ta có $10\sqrt{(x+1)(x-2)(x+2)}+25x+25+x^2-4=27x+25+5x^2$	0,5

		$5\sqrt{(x+1)(x-2)(x+2)} = x+2+2x^2$ Đặt $a = \sqrt{(x+1)(x-2)}$; $b = \sqrt{x+2}$; ($a \geq 0, b > 0$) Khi đó ta có: $2a^2 + 3b^2 = 5ab \Rightarrow a=b$ hoặc $a=1,5b$ Giải ra ta có $x = \sqrt{5} + 1$	0,5 0,5
3 (4,0đ)	a) (2,0đ)	a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M = 4x^2 + 2y^2 - 4xy - 4x + 2023$	
		Ta có: $M = 4x^2 + 2y^2 - 4xy - 4x + 2023$ $\Rightarrow M = (2x - y - 1)^2 + (y - 1)^2 + 2021$	0,5
		Do $(2x - y - 1)^2 \geq 0 \quad \forall x, y$ và $(y - 1)^2 \geq 0 \quad \forall y$	0,5
		Suy ra: $M = (2x - y - 1)^2 + (y - 1)^2 + 2021 \geq 2021 \quad \forall x, y$	0,5
		Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases} (2x - y - 1)^2 = 0 \\ (y - 1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$ Vậy GTNN của $M = 2021$ khi $x = y = 1$	0,5
3 (4,0đ)	b) (2,0đ)	b) . Cho các số thực dương $x; y; z$ thỏa mãn $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng $\frac{x}{x+yz} + \frac{y}{y+zx} + \frac{z}{z+xy} \leq \frac{9}{4}$	
		Ta có $x + yz = x(x + y + z) + yz = (x + y)(z + x)$. Tương tự ta có $y + zx = (x + y)(y + z)$; $z + xy = (y + z)(z + x)$ Do đó:	0,5
		$\frac{x}{x+yz} + \frac{y}{y+zx} + \frac{z}{z+xy} = \frac{x(y+z) + y(z+x) + z(x+y)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$	0,5
		$= \frac{2((x+y)(y+z)(z+x) + xyz)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$	0,5
		$= 2 + \frac{2xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)} \leq 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4} \quad (\text{vì áp dụng BĐT Côsi cho hai số dương ta có: } (x+y)(y+z)(z+x) \geq 2\sqrt{xy} \cdot 2\sqrt{yz} \cdot 2\sqrt{zx} = 8xyz)$ Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}$.	0,5
4 (6.0đ)		Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, ba đường cao AK, BD, CE cắt nhau tại H . a) Chứng minh: $BH \cdot BD = BC \cdot BK$ và $BH \cdot BD + CH \cdot CE = BC^2$. b) Chứng minh $BH = AC \cdot \cot ABC$. c) Gọi M là trung điểm của BC . Đường thẳng qua A vuông góc với AM cắt đường thẳng BD, CE lần lượt tại Q và P . Chứng minh rằng: $MP = MQ$.	



a. Chứng minh: $BH \cdot BD = BC \cdot BK$ và $BH \cdot BD + CH \cdot CE = BC^2$.

a)
(2,0đ)

Xét tam giác: $\triangle BHK$ đồng dạng $\triangle BCD$ có:

Góc KBH chung

$$\widehat{BKH} = \widehat{BDC} = 90^\circ.$$

$\Rightarrow \triangle BHK$ đồng dạng $\triangle BCD$ (g.g)

$$\text{nên } \frac{BH}{BC} = \frac{BK}{BD}$$

$$\Rightarrow BH \cdot BD = BC \cdot BK$$

Tương tự: $\triangle CHK$ đồng dạng $\triangle CBE$

$$\text{nên } \frac{CH}{BC} = \frac{KC}{CE} \Rightarrow CH \cdot CE = BC \cdot KC$$

Cộng vế với vế hai đẳng thức ta được:

$$BH \cdot BD + CH \cdot CE = BC \cdot BK + BC \cdot KC$$

$$\text{hay } BH \cdot BD + CH \cdot CE = BC(BK + KC) = BC^2$$

b. Chứng minh $BH = AC \cdot \cot ABC$.

b)
(2,0đ)

$$\text{Chứng minh: } \triangle BEH \text{ đồng dạng } \triangle CEA (g \cdot g) \Rightarrow \frac{BH}{CA} = \frac{BE}{CE}$$

$$\text{Xét } \triangle BEC \text{ vuông tại } E \Rightarrow \cot ABC = \frac{BE}{CE}$$

$$\Rightarrow \frac{BH}{CA} = \frac{BE}{CE} = \cot ABC \Rightarrow BH = AC \cdot \cot ABC$$

	c) (2,0đ)	c) Gọi M là trung điểm của BC . Đường thẳng qua A vuông góc với AM cắt đường thẳng BD , CE lần lượt tại Q và P . Chứng minh rằng: $MP = MQ$.	
		Gọi M là trung điểm của BC. Đường thẳng qua A vuông góc với AM cắt đường thẳng BD, CE lần lượt tại Q và P. Chứng minh rằng: $MP = MQ$. Chứng minh $\triangle PAH$ đồng dạng $\triangle AMB$ (g.g) $\Rightarrow \frac{PA}{AM} = \frac{AH}{MB}$ Chứng minh: $\triangle QAH$ đồng dạng $\triangle MAC$ (g.g) $\Rightarrow \frac{QA}{AM} = \frac{AH}{MC}$ Do $MB = MC$ (gt) $\Rightarrow \frac{QA}{AM} = \frac{PA}{AM}$ $\Rightarrow PA = QA \Rightarrow \triangle QMP$ cân tại $M \Rightarrow MP = MQ$	0,5 0,5 0,5 0,5
5 (2.0đ)		Trong một buổi gặp mặt có 294 người tham gia, những người tham gia, những người quen nhau bắt tay nhau. Biết nếu A bắt tay B thì một trong hai người A và B bắt tay không quá 6 lần. Hỏi có nhiều nhất bao nhiêu cái bắt tay.	
		Trong 294 người tham gia ta gọi: a là những người bị giới hạn số lần bắt tay; b là những người không bị giới hạn số lần bắt tay. Số người không bị giới hạn số lần bắt tay có tối thiểu là 6 nên $b \geq 6$ Số cái bắt tay từ người bị giới hạn số lần bắt tay tối đa là $6a$ Vậy thì từ b cũng phải cho $6a$ cái bắt tay. Vậy tổng số cái bắt tay là $6a$. Vậy a phải lớn nhất nên b bé nhất bằng 6. $a+b=294$ nên $a=288$. Số cái bắt tay nhiều nhất là $6a=6.288=1728$ cái.	0,5 0,5 0,5 0,5

Ghi chú: Thí sinh có lời giải đúng khác với đáp án vẫn cho điểm tương ứng.