

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi có 01 trang)

Môn thi : Toán

Thời gian : 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi : 10/6/2020

Câu 1. (4,0 điểm)

a) Cho hai số thực dương phân biệt a, b . Xét hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$,
 $B = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$. Rút gọn biểu thức A và tính B theo A .

b) Cho phương trình $x^2 - 3(m+1)x + 2m^2 + 7m - 4 = 0$ với m là tham số. Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt sao cho bình phương của một nghiệm bằng ba lần nghiệm còn lại.

Câu 2. (4,0 điểm)

a) Giải phương trình $4x^2 - 2x - 10 - 5\sqrt{2x-1} = 0$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} y^3 - 2x^3 + 3x^2y - 3xy^2 = 0 \\ x^2y^2 - 4x^2y - y^2 - 8x + 8y + 4 = 0 \end{cases}$$

Câu 3. (2,5 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A có $AC = 2AB$, H là chân đường cao vẽ từ A của tam giác ABC , D là trung điểm của HC .

a) Chứng minh tam giác ADH vuông cân.

b) Gọi F là trung điểm AC , dựng hình vuông $ABEF$. Chứng minh tứ giác $ABED$ nội tiếp trong đường tròn và tính diện tích tam giác ADE khi $AB = 2$ cm.

Câu 4. (4,5 điểm)

Cho nửa đường tròn tâm O , đường kính $AB = 2a$, H là điểm nằm trên đoạn thẳng OA sao cho $HA = 2HO$. Đường thẳng vuông góc với AB tại H cắt nửa đường tròn đã cho tại C . Hạ HP vuông góc với AC tại P , HQ vuông góc với BC tại Q .

a) Chứng minh OC vuông góc với PQ .

b) Gọi I là giao điểm của OC và PQ . Tính độ dài đoạn thẳng CI theo a .

c) Lấy điểm M trên tia đối của tia BA (M khác B), đường thẳng MC cắt nửa đường tròn đã cho tại điểm thứ hai là D . Hai đường tròn ngoại tiếp hai tam giác OAC và OBD cắt nhau tại điểm thứ hai là K , gọi E là giao điểm của AD và BC . Chứng minh bốn điểm A, B, E, K cùng nằm trên một đường tròn và KO vuông góc với KE .

Câu 5. (5,0 điểm)

a) Tìm số tự nhiên có 7 chữ số đôi một khác nhau có dạng $n = \overline{\text{COVID}19}$, biết n chia hết cho 7 và số $\overline{\text{COVID}}$ là số chính phương chia hết cho 5.

b) Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $a^2b + ab^2 + ab = a^2 + b^2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \frac{1}{a} \sqrt{1 + \frac{a}{b}} + \frac{1}{b} \sqrt{1 + \frac{b}{a}}$.

----- HẾT -----

(Giám thị không giải thích gì thêm)

Họ và tên thí sinh: Phòng thi: Số báo danh:

HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ ĐÁP ÁN

Môn: TOÁN

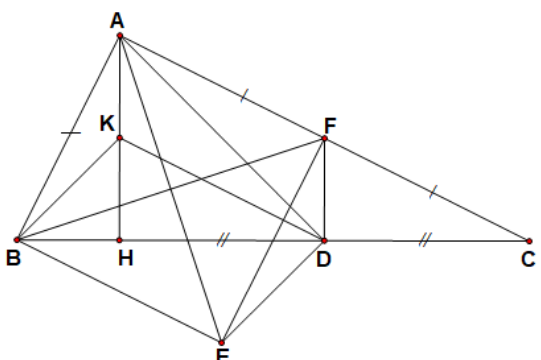
(Hướng dẫn chấm này có 06 trang)

Câu	Đáp án	Điểm
Câu 1 (4,5 đ)	a) Cho hai số thực dương phân biệt a, b . Xét hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$, $B = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$. Rút gọn biểu thức A và tính B theo A .	2,0
	Ta có $A = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 + (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{a - b} = \frac{2(a + b)}{a - b}$ (Đúng bước 1 được 0,5 điểm; đúng bước 2 được 0,25 điểm)	0,75
	$B = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} = \frac{(a + b)^2 + (a - b)^2}{2(a - b)(a + b)}$	0,5
	$= \frac{1}{2} \left[\frac{a + b}{a - b} + \frac{a - b}{a + b} \right]$	0,25
	$= \frac{1}{2} \left[\frac{A}{2} + \frac{2}{A} \right] = \frac{A^2 + 4}{4A}$	0,5
	b) Cho phương trình $x^2 - 3(m + 1)x + 2m^2 + 7m - 4 = 0$ với m là tham số. Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt sao cho bình phương của một nghiệm bằng ba lần nghiệm còn lại.	2,0
	$\Delta = 9(m + 1)^2 - 4.1.(2m^2 + 7m - 4) = m^2 - 10m + 25 = (m - 5)^2$ (Chỉ cần $\Delta = m^2 - 10m + 25$ được 0,25 điểm)	0,25
	+ Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta > 0$	0,25
	$\Leftrightarrow (m - 5)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 5$.	0,25
	+ Với điều kiện $m \neq 5$, pt đã cho có hai nghiệm phân biệt là: $x_1 = \frac{3(m + 1) - (m - 5)}{2} = m + 4, x_2 = \frac{3(m + 1) + (m - 5)}{2} = 2m - 1$	0,25
	+ Theo đề bài ta có: $\begin{cases} (m + 4)^2 = 3(2m - 1) \\ (2m - 1)^2 = 3(m + 4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m + 19 = 0 \text{ (VN)} \\ 4m^2 - 7m - 11 = 0 \text{ (*)} \end{cases}$ (Đúng mỗi bước được 0,25 điểm)	0,5
	(*) $\Leftrightarrow m = -1$ hoặc $m = \frac{11}{4}$ (thỏa)	0,5
	Vậy có hai giá trị cần tìm là $m = -1, m = \frac{11}{4}$.	

Câu 2 (4,0 đ)	a) Giải phương trình $4x^2 - 2x - 10 - 5\sqrt{2x-1} = 0$ (1)		2,0
	Điều kiện: $x \geq \frac{1}{2}$.		0,25
	$t = \sqrt{2x-1} (t \geq 0) \Rightarrow x = \frac{t^2+1}{2}$		0,25
	+ PT (1) trở thành: $4\left(\frac{t^2+1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{t^2+1}{2}\right) - 10 - 5t = 0 \Leftrightarrow t^4 + t^2 - 5t - 10 = 0$		0,25
	$\Leftrightarrow (t^4 - 16) + (t^2 - 5t + 6) = 0 \Leftrightarrow (t^2 - 4)(t^2 + 4) + (t - 2)(t - 3) = 0$ $\Leftrightarrow (t - 2)[(t + 2)(t^2 + 4) + t - 3] = 0 (*)$		0,5
	Vì $t \geq 0$ nên $(t + 2)(t^2 + 4) + t - 3 \geq 5$.		0,25
	Do đó pt (*) có một nghiệm duy nhất $t = 2$.		0,25
	Suy ra phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất $x = \frac{5}{2}$.		0,25
	* Cách khác:		
	Điều kiện: $x \geq \frac{1}{2}$.	0,25	
	$4x^2 - 2x - 10 - 5\sqrt{2x-1} = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 2x - 20 - 5(\sqrt{2x-1} - 2) = 0$	0,25	
	$\Leftrightarrow 2(2x-5)(x+2) - 5\left(\frac{2x-5}{\sqrt{2x-1}+2}\right) = 0$	0,5	
	$\Leftrightarrow (2x-5)\left(2x+4 - \frac{5}{\sqrt{2x-1}+2}\right) = 0$	0,25	
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ 2x+4 = \frac{5}{\sqrt{2x-1}+2} (*) \end{cases}$	0,25	
	+ Vì $x \geq \frac{1}{2}$ nên $2x+4 \geq 5$ và $\frac{5}{\sqrt{2x-1}+2} \leq \frac{5}{2}$. Do đó pt(*) vô nghiệm.	0,5	
	Vậy phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất $x = \frac{5}{2}$.		

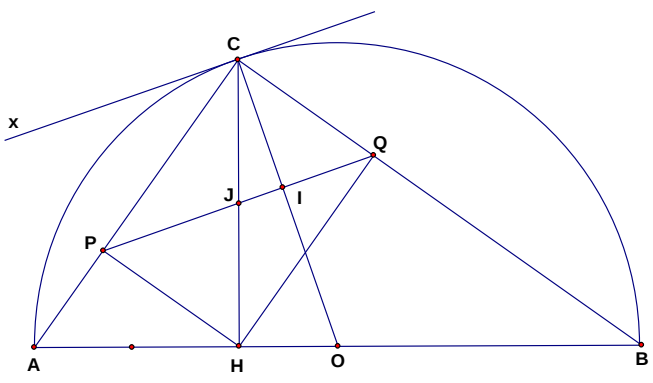
	b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^3 - 2x^3 + 3x^2y - 3xy^2 = 0 \\ x^2y^2 - 4x^2y - y^2 - 8x + 8y + 4 = 0 \end{cases}$		2,0
	- Xét phương trình $y^3 - 2x^3 + 3x^2y - 3xy^2 = 0$ (1) + Với $x = 0$ thay vào (1) suy ra $y = 0$ (không thỏa pt còn lại của hệ).		0,25
	+ Với $x \neq 0$: chia 2 vế của pt (1) cho x^3 ta được phương trình tương đương: $\frac{y^3}{x^3} - 3\frac{y^2}{x^2} + 3\frac{y}{x} - 2 = 0$, đặt $t = \frac{y}{x}$ phương trình trở thành: $t^3 - 3t^2 + 3t - 2 = 0$.		0,25
	$\Leftrightarrow (t-2)(t^2 - t + 1) = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow y = 2x$ (Không yêu cầu giải thích $t^2 - t + 1 \neq 0$)		0,25
	Thay $y = 2x$ vào phương trình $x^2y^2 - 4x^2y - y^2 - 8x + 8y + 4 = 0$ ta được: $x^2 \cdot 4x^2 - 4x^2 \cdot 2x - 4x^2 - 8x + 16x + 4 = 0 \Leftrightarrow x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0$		0,25

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 2\left(x - \frac{1}{x}\right) - 1 = 0$	0,25
$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(x - \frac{1}{x}\right) + 1 = 0$	0,25
$\Leftrightarrow x - \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.	0,25
Suy ra hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm: $(x; y) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; 1+\sqrt{5}\right), (x; y) = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; 1-\sqrt{5}\right)$.	0,25
Cách khác: $y^3 - 2x^3 + 3x^2y - 3xy^2 = 0 \Leftrightarrow (y^3 - 8x^3) - 3x^2y + 6x^3 - 3xy^2 + 6x^2y = 0$ $\Leftrightarrow (y - 2x)(y^2 + 2xy + 4x^2) - 3x^2(y - 2x) - 3xy(y - 2x) = 0$	0,25
$\Leftrightarrow (y - 2x)(x^2 - xy + y^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x^2 - xy + y^2 = 0 \end{cases}$	0,25
$x^2 - xy + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$ (không thỏa pt còn lại trong hệ).	0,25
* Có thể biến đổi: $y^3 - 2x^3 + 3x^2y - 3xy^2 = 0 \Leftrightarrow (x^3 + y^3) - 3x^3 + 3x^2y - 3xy^2 = 0$ $\Leftrightarrow (x + y)(x^2 - xy + y^2) - 3x(x^2 - xy + y^2) = 0$ $\Leftrightarrow (y - 2x)(x^2 - xy + y^2) = 0$	

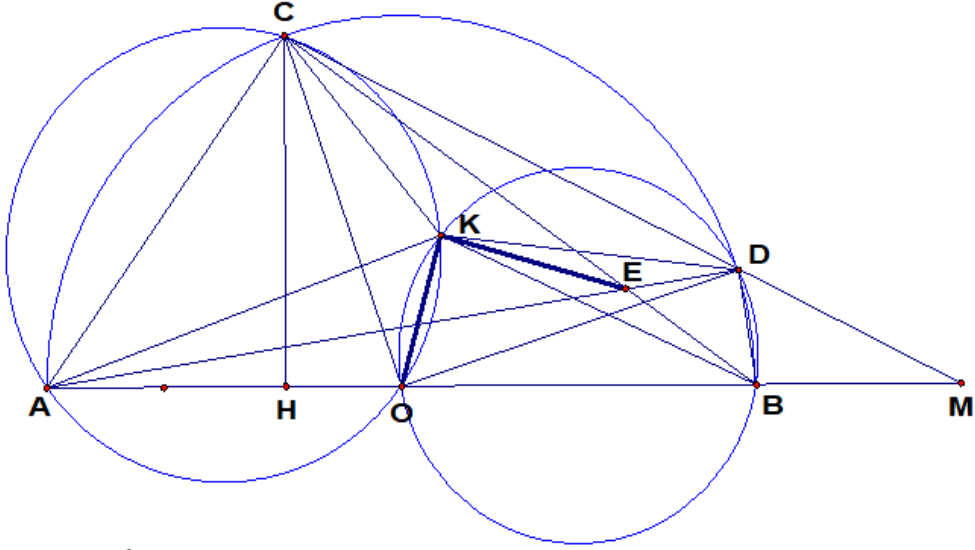
Câu 3 (2,5 đ)	Cho tam giác ABC vuông tại A có AC=2AB, H là chân đường cao vẽ từ A của tam giác ABC, D là trung điểm của HC. a) Chứng minh tam giác ADH vuông cân. b) Gọi F là trung điểm AC, dựng hình vuông ABEF. Chứng minh tứ giác ABED nội tiếp trong đường tròn và tính diện tích tam giác ADE khi AB = 2 cm.	2,5
	a) Chứng minh tam giác ADH vuông cân.	1,0
	 (Không có hình vẽ không chấm bài)	
	+ Chứng minh được hai tam giác AHC và BAC đồng dạng	0,5
	+ Suy ra $\frac{AH}{HC} = \frac{BA}{AC} = \frac{1}{2}$	0,25
	Suy ra $AH = \frac{1}{2} HC = HD$. Vậy tam giác AHD vuông cân tại H.	0,25
	* Cách khác: Trong tam giác vuông ABC có: $\tan ACB = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$ (1)	0,25

+ $\tan ACB = \tan ACH = \frac{AH}{HC}$ (2)	0,25
Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{AH}{HC} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow HC = 2AH \Rightarrow AH = HD$	0,25
Vậy tam giác AHD vuông cân tại H.	0,25

b) Gọi F là trung điểm AC , dựng hình vuông $ABEF$. Chứng minh tứ giác $ABED$ nội tiếp trong đường tròn và tính diện tích tam giác ADE khi $AB = 2$ cm.	1,5
+ Gọi K là trung điểm của AH . Suy ra được tứ giác $BEDK$ là hình bình hành.	0,25
+ Mà $BE \perp AB$ nên $DK \perp AB$.	
Suy ra K là trực tâm của tam giác ABD .	
Suy ra $BK \perp AD$	0,25
Mà $BK \parallel ED$ suy ra $ED \perp AD$	
Suy ra tứ giác $ABED$ nội tiếp trong đường tròn.	0,25
* Cách khác: D nằm trên đường tròn đường kính BF	0,25
Mà $ABEF$ là hình vuông nên đường tròn đường kính BF là đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABEF$.	0,25
Suy ra tứ giác $ABED$ nội tiếp trong đường tròn đường kính AE .	0,25
* Có thể trình bày như sau:	
$\angle AEB = \angle ADB = 45^\circ$	0,5
Mà E, D nằm cùng phía đối với AB nên tứ giác $ABED$ nội tiếp trong đường tròn.	0,25
$S_{ADE} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot DE$; $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16} \Rightarrow AH = \frac{4}{\sqrt{5}}$	0,25
$AD = AH \sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$, $ED^2 = AE^2 - AD^2 = 8 - \frac{32}{5} = \frac{8}{5} \Rightarrow ED = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$	0,25
Suy ra $S_{ADE} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot DE = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{8}{5} \text{ (cm}^2\text{)}$	0,25

Câu 4 (4,5 đ)	Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính $AB = 2a$, H là điểm nằm trên đoạn thẳng OA sao cho $HA = 2HO$. Đường thẳng vuông góc với AB tại H cắt nửa đường tròn đã cho tại C. Hạ HP vuông góc với AC tại P, HQ vuông góc với BC tại Q. a) Chứng minh OC vuông góc với PQ. b) Gọi I là giao điểm của OC và PQ. Tính độ dài đoạn thẳng CI theo a. c) Lấy điểm M trên tia đối của tia BA (M khác B), đường thẳng MC cắt nửa đường tròn đã cho tại điểm thứ hai là D. Hai đường tròn ngoại tiếp hai tam giác OAC và OBD cắt nhau tại điểm thứ hai là K, gọi E là giao điểm của AD và BC. Chứng minh bốn điểm A, B, E, K cùng nằm trên một đường tròn và KO vuông góc với KE.	4,5
	a) Chứng minh OC vuông góc với PQ .	1,5
 - Hình vẽ phục vụ đến câu b: 0,25 điểm		

+ Dụng tiếp tuyến Cx của nửa đường tròn (O) . Suy ra $ACx = ABC$ (1).	0,25
Ta có: $CPQ + CQP = 90^\circ$, $ABC + JCQ = 90^\circ$, $CQP = JCQ$. Suy ra $CPQ = ABC$ (2).	0,5
Từ (1) và (2) suy ra $ACx = CPQ$. Do đó $Cx \parallel PQ$.	0,25
Mà $OC \perp Cx$ nên $OC \perp PQ$.	0,25
b) Gọi I là giao điểm của OC và PQ . Tính độ dài đoạn thẳng CI theo a .	1,5
Gọi J là giao điểm của hai đường thẳng PQ và CH . + Chứng minh được hai tam giác HCO và ICJ đồng dạng.	0,5
Suy ra: $CI.CO = CJ.CH \Leftrightarrow CI = \frac{CJ.CH}{CO}$	0,25
+ $CH^2 = CO^2 - OH^2 = a^2 - \frac{a^2}{9} = \frac{8a^2}{9} \Rightarrow CH = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$,	0,25
$CJ = \frac{1}{2}CH = \frac{a\sqrt{2}}{3}$. + Suy ra được $CI = \frac{4a}{9}$.	0,5
(Nếu HS không chứng minh được OC vuông góc với PQ thì vẫn sử dụng giả thiết này để làm câu b)	

c) Lấy điểm M trên tia đối của tia BA (M khác B), đường thẳng MC cắt nửa đường tròn đã cho tại điểm thứ hai là D . Hai đường tròn ngoại tiếp hai tam giác OAC và OBD cắt nhau tại điểm thứ hai là K , gọi E là giao điểm của AD và BC . Chứng minh bốn điểm A, B, E, K cùng nằm trên một đường tròn và KO vuông góc với KE .	1,5
	
+ Xét các cung đối với đường tròn (O) : Ta có các tứ giác $AOKC$ và $BOKD$ nội tiếp nên $OKB = ODB = OBD$ và $OKA = OCA = OAC$	0,25
$AKB = OKB + OKA = OBD + OAC = \frac{1}{2}(sd ACD + sd CDB) = \frac{1}{2}sd AB + \frac{1}{2}sd CD = 90^\circ + \frac{1}{2}sd CD$	0,25
Ngoài ra $AEB = ADB + CBD = 90^\circ + \frac{1}{2}sd CD$. Suy ra $AKB = AEB$.	0,25
Suy ra bốn điểm A, K, B, E nằm trên một đường tròn.	0,25
Do đó: $EKO = EKA - AKO = (180^\circ - EBA) - ACO = 180^\circ - (EBA + CAO)$ $= 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$. Suy ra OK vuông góc với KE .	0,25

Câu 5	a) Tìm số tự nhiên có 7 chữ số đôi một khác nhau có dạng $n = \overline{\text{COVID}19}$, biết n chia hết cho 7 và số $\overline{\text{COVID}}$ là số chính phương chia hết cho 5.	3,0
	Theo đề bài ta có: $C; O; V; I; D \in \{0; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ và $\overline{\text{COVID}}:5 \Rightarrow D \in \{0; 5\}$	0,25
	+ Nếu $D = 0$ do $\overline{\text{COVID}}$ là số chính phương nên $I = D = 0$ mâu thuẫn I khác D . Suy ra $D = 5$.	0,25
	+ $D = 5$ mà $\overline{\text{COVID}}$ là số chính phương nên $ID = 25$	0,25
	Suy ra $\overline{\text{COVID}} = \overline{\text{COV}25} = (a5)^2 \ (a \geq 10)$	0,25
	$\Rightarrow \overline{\text{COVID}} = (10a + 5)^2 = 100.a(a + 1) + 25$	0,25
	Do đó $\overline{\text{COV}} = a(a + 1)$	0,5
	Mà $a(a + 1)$ là tích 2 số tự nhiên liên tiếp nên $V \in \{0; 2; 6\}$ mà $I = 2$ do đó $V \in \{0; 6\}$.	
	Ta có $100 < \overline{\text{COV}} < 999 \Rightarrow 10 < a < 33$	0,25
	Trong các số có 3 chữ số khác nhau (khác 2, 5) là tích của 2 số tự nhiên liên tiếp có chữ số tận cùng bằng 0 hoặc 6 chỉ có các tích sau thỏa mãn: $306 = 17.18; 380 = 19.20; 870 = 29.30 \Rightarrow \overline{\text{COV}} \in \{306; 380; 870\}$.	0,75
	Lại có: $n = \overline{\text{COVID}19} = \overline{\text{COV}2519}:7$ Dễ dàng kiểm tra được hai số thỏa mãn thỏa đề là 3802519 và 8702519 .	0,25
	b) Cho hai số thực dương a và b thỏa mãn $a^2b + ab^2 + ab = a^2 + b^2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \frac{1}{a}\sqrt{1 + \frac{a}{b}} + \frac{1}{b}\sqrt{1 + \frac{b}{a}}$.	2,0
	Ta có: $a^2b + ab^2 + ab = a^2 + b^2 \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{ab} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \ (1)$.	0,25
	Đặt $\frac{1}{a} = x, \frac{1}{b} = y \ (x, y > 0)$.	
	Khi đó $A = x\sqrt{1 + \frac{y}{x}} + y\sqrt{1 + \frac{x}{y}} = \sqrt{x^2 + xy} + \sqrt{y^2 + xy}$.	0,5
	+ (1) trở thành: $x + y + xy = x^2 + y^2 \Leftrightarrow x + y = (x + y)^2 - 3xy$.	
	Lại có: $xy \leq \frac{(x + y)^2}{4} \Rightarrow 3xy \leq \frac{3(x + y)^2}{4}$.	0,5
	Do đó $x + y \geq (x + y)^2 - \frac{3(x + y)^2}{4} \Rightarrow 0 < x + y \leq 4$.	0,5
	+ $A = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2x(x + y)} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2y(x + y)}$ $\leq \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{2x + (x + y)}{2}\right] + \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{2y + (x + y)}{2}\right] = \sqrt{2} \cdot (x + y) \leq 4\sqrt{2}$.	0,25
	* Có thể dùng BĐT Bunhiacovsky: $(A = \sqrt{x^2 + xy} + \sqrt{y^2 + xy} \leq \sqrt{(1^2 + 1^2)\left[\left(\sqrt{x^2 + xy}\right)^2 + \left(\sqrt{y^2 + xy}\right)^2\right]} = \sqrt{2} \cdot (x + y) \leq 4\sqrt{2})$	0,25
	Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} x = y \\ x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 2 \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}$.	
	Vậy giá trị lớn nhất của A bằng $4\sqrt{2}$ khi $a = b = \frac{1}{2}$. (Có cơ sở kết luận mới cho điểm phần này)	0,25

Ghi chú: Nếu học sinh có cách giải khác đúng thì Ban Giám khảo thảo luận và thống nhất thang điểm cho phù hợp với Hướng dẫn chấm.