

Câu 1: (4 điểm)

1. Cho biểu thức $A = \sqrt[3]{1 + \frac{\sqrt{84}}{9}} + \sqrt[3]{1 - \frac{\sqrt{84}}{9}}$. Chứng minh rằng A là một số nguyên.

2. Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $xy + yz + xz = 1$. Hãy tính:

$$B = x \cdot \sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{(1+x^2)}} + y \cdot \sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{(1+y^2)}} + z \cdot \sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{(1+z^2)}}$$

Câu 2: (4 điểm)

1. Giải phương trình: $\sqrt{x-2}\sqrt{x-1} = \sqrt{x-1} - 1$

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + 2y^2 = 1 \\ y^2 - 3yz + 4z^2 = 2 \\ z^2 + 3xz - x^2 = 3 \end{cases}$$

Câu 3: (6 điểm)

1. Cho a, b, c là các số nguyên thỏa mãn: $a + b + c$ chia hết cho 12. Khi đó, chứng minh rằng $P = (a+b)(b+c)(c+a) - 5abc$ cũng chia hết cho 12.

2. Cho một mảnh đất hình vuông, chiều dài mỗi cạnh là 1000m. Trên mảnh đất đã trồng 4500 cây ăn trái các loại, cây lớn nhất có đường kính 0,5m. Người ta muốn xây dựng các căn nhà nghỉ dưỡng trên mảnh đất này để làm khu du lịch sinh thái. Hãy chứng minh rằng người ta có thể xây dựng được ít nhất 60 căn nhà nghỉ dưỡng trên mảnh đất (với diện tích mỗi căn nhà là $200m^2$) mà không phải chặt đi một cây ăn trái nào đã trồng trên mảnh đất.

3. Cho x, y là hai số thực dương. Chứng minh rằng: $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} - \frac{3x}{y} - \frac{3y}{x} + 4 \geq 0$.

Câu 4: (6 điểm)

1. Cho tấm bìa hình tam giác ABC có trọng tâm G. Gấp tấm bìa theo đường EF sao cho đỉnh C trùng với trọng tâm G (E, F lần lượt nằm trên hai cạnh CA, CB). Khi đó, chứng minh rằng:

$$\frac{AC}{EC} + \frac{BC}{FC} = 6.$$

2. Cho đường tròn tâm O đường kính AB (A, B cố định). Lấy hai điểm M, N lần lượt thuộc hai nửa đối nhau của đường tròn (O) sao cho góc $\widehat{MAN}$ luôn bằng 60° ($M \neq B, N \neq B$). Đường thẳng BN cắt tia AM tại E, đường thẳng BM cắt tia AN tại F.

a) Tính tỉ số $\frac{EF}{AB}$.

b) Khi tam giác AMN đều, gọi C là điểm di động trên cung nhỏ AN ($C \neq A; C \neq N$). Đường thẳng qua M và vuông góc với AC cắt đường thẳng NC tại D. Xác định vị trí của điểm C để diện tích tam giác MCD là lớn nhất.

---HẾT---

Thí sinh không được mang máy tính và tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ tên thí sinh:Số báo danh:

Chữ ký giám thị 1:.....Chữ ký giám thị 2:.....