

Câu 1: (2,0 điểm)

a) Cho $x, y > 1$ thỏa mãn $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} = \frac{5}{xy+4}$. Tính giá trị của biểu thức $A = x^3 + y^3 + 9xy$.

b) Xét đa thức $P(x) = x^2 + ax + b$ với a, b là các hệ số nguyên. Chứng minh rằng nếu $P(1 + \sqrt{2}) = 2024$ thì $P(1 - \sqrt{2}) = 2024$.

Câu 2: (2,0 điểm)

a) Giải phương trình $x^2 = (2x - 9)(\sqrt{x^2 + 2x - 8} - 2)$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2(x - y) + (y - 1)^2 = 0 \\ 4x^3 - 9x^2 + 7x + 3y^2 - 10y + 5 = 0. \end{cases}$$

Câu 3: (3,0 điểm) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) và $AB < AC$. Ba đường cao của tam giác ABC là AD, BE, CF đồng quy tại điểm H . Gọi AQ là đường kính của đường tròn (O) , đường thẳng HQ cắt cạnh BC tại điểm M . Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt đường tròn (O) tại điểm N và cắt đường thẳng AM tại điểm K (N, K khác A), đường thẳng AN cắt đường thẳng BC tại điểm P . Chứng minh rằng:

a) HQ vuông góc với AN và $\widehat{FDH} = \widehat{HDE}$, $\widehat{FDK} = \widehat{NDE}$.

b) Ba điểm P, E, F thẳng hàng.

c) $PE \cdot PF < PM^2$.

Câu 4: (1,5 điểm)

a) Chứng minh với mọi số nguyên dương n , số $n^5 - 6n + 33$ không là số chính phương.

b) Cho các số nguyên dương a, b thỏa mãn điều kiện $a + b + 1$ là ước nguyên tố của $4(a^2 + ab + b^2) - 3$. Chứng minh rằng $a + b - 1$ là ước của $4(a^2 + ab + b^2) - 3$.

Câu 5: (1,5 điểm)

a) Xét x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xy + yz + zx \leq xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = xy^2 + yz^2 + zx^2 - 18(x + y + z)$.

b) Cho bảng hình chữ nhật gồm 2 dòng và n cột, được chia đều thành $2n$ ô vuông đơn vị. Ban đầu, trong mỗi ô vuông đơn vị người ta đặt đúng một viên bi có kích thước rất nhỏ. Ta gọi mỗi biến đổi (T) là việc thực hiện các thao tác sau: Chọn ra hai ô vuông đơn vị tùy ý có chứa bi, chuyển từ mỗi ô vuông đó đi một viên bi sang ô vuông đơn vị liền kề (hai ô vuông đơn vị gọi là liền kề nếu chúng có chung cạnh). Tìm tất cả các số nguyên dương n để sau hữu hạn lần chỉ thực hiện biến đổi (T), ta có thể đưa hết tất cả các viên bi có trên bảng lúc đầu về nằm trong cùng một ô vuông đơn vị của bảng.

-----Hết-----

Họ và tên thí sinh: Họ tên, chữ ký GT 1
Số báo danh: Họ tên, chữ ký GT 2

Câu 1: (2,0 điểm)

a) Cho $x, y > 1$ thỏa mãn $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} = \frac{5}{xy+4}$. Tính giá trị của biểu thức $A = x^3 + y^3 + 9xy$.

b) Xét đa thức $P(x) = x^2 + ax + b$ với a, b là các hệ số nguyên. Chứng minh rằng nếu $P(1+\sqrt{2}) = 2024$ thì $P(1-\sqrt{2}) = 2024$.

Ý	Nội dung	Điểm
1a) 1,0đ	+ Ta có $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} = \frac{5}{xy+4} \Rightarrow (xy+4)(x+y+2) = 5(x+1)(y+1)$ $\Leftrightarrow xy(x+y)+3 = 3xy+x+y \Leftrightarrow (x+y-3)(xy-1) = 0$ (1)	0,25
	+ Với $x, y > 1$ thì $xy-1 > 0$, do đó (1) $\Leftrightarrow x+y=3$.	0,25
	+ Vậy $A = x^3 + y^3 + 9xy = (x+y)^3 - 3xy(x+y) + 9xy$	0,25
	$= 3^3 - 3xy \cdot 3 + 9xy = 27$.	0,25
1b) 1,0đ	+ Ta có $P(1+\sqrt{2}) = 2024 \Leftrightarrow (1+\sqrt{2})^2 + a(1+\sqrt{2}) + b = 2024$	0,25
	$\Leftrightarrow (a+2)\sqrt{2} = 2021 - a - b$.	0,25
	+ Do $a+2, 2021-a-b$ là các số nguyên trong khi $\sqrt{2}$ là số vô tỉ nên phải xảy ra $\begin{cases} a+2=0 \\ 2021-a-b=0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} a=-2 \\ b=2023. \end{cases}$	0,25
	+ Vậy $P(1-\sqrt{2}) = (1-\sqrt{2})^2 - 2(1-\sqrt{2}) + 2023$ $= 3 - 2\sqrt{2} - 2 + 2\sqrt{2} + 2023 = 2024$, có điều phải chứng minh.	0,25

Câu 2: (2,0 điểm)

a) Giải phương trình $x^2 = (2x-9)(\sqrt{x^2+2x-8}-2)$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2(x-y) + (y-1)^2 = 0 \\ 4x^3 - 9x^2 + 7x + 3y^2 - 10y + 5 = 0. \end{cases}$

Ý	Nội dung	Điểm
	+ Điều kiện xác định $x^2 + 2x - 8 \geq 0$.	

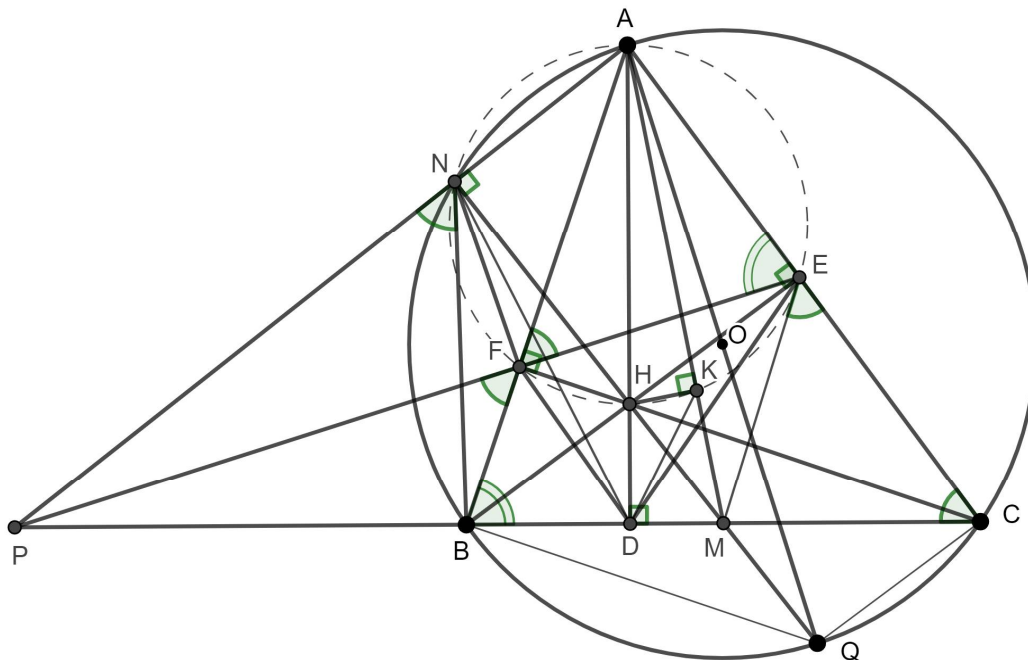
2a) 1,0đ	Phương trình được viết lại là $x^2 + 2x - 8 - (2x - 9)\sqrt{x^2 + 2x - 8} + (2x - 10) = 0$. Đặt $t = \sqrt{x^2 + 2x - 8}$ thì được $t^2 - (2x - 9)t + 2x - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2x - 10. \end{cases}$	0,25
	+ Với $t = 1$ thì $\sqrt{x^2 + 2x - 8} = 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{10}$.	0,25
	+ Với $t = 2x - 10$ thì $\sqrt{x^2 + 2x - 8} = 2x - 10 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 10 \geq 0 \\ x^2 + 2x - 8 = (2x - 10)^2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x^2 - 14x + 36 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 7 + \sqrt{13}$.	0,25
	+ Vậy phương trình cho có tập nghiệm là $S = \{7 + \sqrt{13}; -1 \pm \sqrt{10}\}$.	0,25
	<i>Cách khác:</i> Chuyển về, bình phương để khử căn ta được PT hệ quả $(2x - 9)^2 (x^2 + 2x - 8) = (x^2 + 4x - 18)^2 \Leftrightarrow x^4 - 12x^3 - x^2 + 198x - 324 = 0$ (0,25) $\Leftrightarrow (x^2 + 2x - 9)(x^2 - 14x + 36) = 0$ (0,25) $\Leftrightarrow x \in \{-1 \pm \sqrt{10}; 7 \pm \sqrt{13}\}$ (0,25) Thử lại và kết luận. (0,25)	
2b) 1,0đ	Xét hệ phương trình $\begin{cases} x^2(x - y) + (y - 1)^2 = 0 & (1) \\ 4x^3 - 9x^2 + 7x + 3y^2 - 10y + 5 = 0 & (2) \end{cases}$ + Ta có (1) $\Leftrightarrow y^2 - (x^2 + 2)y + x^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ y = x^2 - x + 1. \end{cases}$	0,25
	+ Nếu $y = x^2 - x + 1$, thay vào (2) thu được $4x^3 - 9x^2 + 7x + 3(x^2 - x + 1)^2 - 10(x^2 - x + 1) + 5 = 0$ $\Leftrightarrow 3x^4 - 2x^3 - 10x^2 + 11x - 2 = 0$ $\Leftrightarrow (x + 2)(x - 1)(3x^2 - 5x + 1) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{-2; 1; \frac{5 \pm \sqrt{13}}{6}\right\}$	0,25
	Tìm được các nghiệm $(x; y) = (-2; 7), (1; 1), \left(\frac{5 + \sqrt{13}}{6}; \frac{11 + \sqrt{13}}{9}\right), \left(\frac{5 - \sqrt{13}}{6}; \frac{11 - \sqrt{13}}{9}\right)$.	0,25

+ Nếu $y = x + 1$, thay vào (2) thu được $4x^3 - 9x^2 + 7x + 3(x+1)^2 - 10(x+1) + 7x + 5 = 0$ $\Leftrightarrow 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = 3 \Leftrightarrow (2x-1)^3 = 3 \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt[3]{3}}{2}.$ Tìm được nghiệm $(x; y) = \left(\frac{1+\sqrt[3]{3}}{2}; \frac{3+\sqrt[3]{3}}{2}\right).$ Vậy hệ cho có đúng 5 bộ nghiệm $(x; y)$ là $(-2; 7), (1; 1), \left(\frac{5+\sqrt{13}}{6}; \frac{11+\sqrt{13}}{9}\right), \left(\frac{5-\sqrt{13}}{6}; \frac{11-\sqrt{13}}{9}\right), \left(\frac{1+\sqrt[3]{3}}{2}; \frac{3+\sqrt[3]{3}}{2}\right).$	0,25
---	------

Câu 3: (3,0 điểm) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) và $AB < AC$. Ba đường cao của tam giác ABC là AD, BE, CF đồng quy tại điểm H . Gọi AQ là đường kính của đường tròn (O) , đường thẳng HQ cắt cạnh BC tại điểm M . Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt đường tròn (O) tại điểm N và cắt đường thẳng AM tại điểm K (N và K khác A), đường thẳng AN cắt đường thẳng BC tại điểm P . Chứng minh rằng:

- HQ vuông góc với AN và $\widehat{FDH} = \widehat{HDE}$, $\widehat{FDK} = \widehat{NDE}$.
- Ba điểm P, E, F thẳng hàng.
- $PE \cdot PF < PM^2$.

Hình vẽ:



Ý	Nội dung	Điểm
3a) 1,0đ	+ Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF là đường tròn đường kính AH , suy ra $HN \perp NA$.	0,25
	+ Mặt khác N thuộc đường tròn đường kính AQ nên $QN \perp NA$, suy ra N, H, Q thẳng hàng và có $HQ \perp AN$.	0,25
	+ Có $\widehat{ADC} = \widehat{AFC} = 90^\circ$ nên tứ giác $ACDF$ nội tiếp, do đó $\widehat{FDB} = \widehat{BAC}$. Tương tự có $\widehat{EDC} = \widehat{BAC}$. Suy ra $\widehat{FDH} = 90^\circ - \widehat{FDB} = 90^\circ - \widehat{BAC} = 90^\circ - \widehat{EDC} = \widehat{EDH}$ (1).	0,25
	+ Có $\widehat{ANM} = \widehat{ADM} = 90^\circ$ nên tứ giác $ANDM$ nội tiếp, suy ra $\widehat{NDH} = \widehat{HMK}$. Có $\widehat{HDM} = \widehat{HKA} = 90^\circ$ nên tứ giác $HDMK$ nội tiếp, suy ra $\widehat{HMK} = \widehat{HDK}$. Vậy $\widehat{NDH} = \widehat{HDK}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{FDK} = \widehat{FDH} + \widehat{HDK} = \widehat{HDE} + \widehat{NDH} = \widehat{NDE}$.	0,25
3b) 1,0đ	+ Tứ giác $ANFE$ nội tiếp nên suy ra $\widehat{ANF} = \widehat{FEC}$. Có $\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90^\circ$ nên tứ giác $BFEC$ nội tiếp, suy ra $\widehat{FEC} = \widehat{FBP}$. Vậy có $\widehat{ANF} = \widehat{FBP}$, suy ra tứ giác $NPBF$ nội tiếp.	0,5
	+ Theo đó $\widehat{PFB} = \widehat{PNB} = \widehat{BCA} = \widehat{EFA}$. Vậy $\widehat{PFB} = \widehat{EFA}$, mà B, F, A thẳng hàng nên P, F, E cũng thẳng hàng.	0,5
3c) 1,0đ	+ Chứng minh được $BHCQ$ là hình bình hành nên M là trung điểm của BC .	0,25
	+ Tam giác EMC cân tại M nên $\widehat{MEC} = \widehat{BCA}$. Từ đó có $\widehat{PEM} = 180^\circ - \widehat{MEC} - \widehat{FEA} = 180^\circ - \widehat{BCA} - \widehat{ABC} = \widehat{BAC} = \widehat{FDP}$. Suy ra hai tam giác PFD, PME đồng dạng (g-g).	0,25
	+ Suy ra $\frac{PF}{PM} = \frac{PD}{PE}$ hay $PE \cdot PF = PD \cdot PM$.	0,25
	+ Do $AB < AC$ nên $BD < DC \Rightarrow BD < \frac{BD + DC}{2} = BM \Rightarrow PD < PM$. Vậy $PE \cdot PF = PD \cdot PM < PM^2$.	0,25
	Cách khác: + Chứng minh M là trung điểm của BC . + Chứng minh $PE \cdot PF = PB \cdot PC$. + Chỉ ra $PB \cdot PC = \left(PM - \frac{BC}{2} \right) \left(PM + \frac{BC}{2} \right) = PM^2 - \frac{BC^2}{4}$. + Từ $\frac{BC^2}{4} > 0$ suy ra $PB \cdot PC < PM^2$.	

Câu 4: (1,5 điểm)

a) Chứng minh với mọi số nguyên dương n , số $n^5 - 6n + 33$ không là số chính phương.

b) Cho các số nguyên dương a, b thỏa mãn điều kiện $a + b + 1$ là ước nguyên tố của $4(a^2 + ab + b^2) - 3$. Chứng minh rằng $a + b - 1$ là ước của $4(a^2 + ab + b^2) - 3$.

Ý	Nội dung	Điểm
4a) 1,0đ	Có $n^5 - 6n + 33 = (n^5 - n) - 5n + 33$	0,25
	+ Theo định lí Fermat có $n^5 \equiv n \pmod{5}$ nên $(n^5 - n) \equiv 0 \pmod{5}$	0,25
	Do $5n \equiv 0, 33 \equiv 3 \pmod{5}$ nên suy ra $n^5 - 6n + 33 \equiv 3 \pmod{5} (*)$.	0,25
	+ Một số chính phương khi chia cho 5 chỉ có thể cho số dư thuộc $\{0;1;4\}$. Vậy từ $(*)$ suy ra $n^5 - 6n + 33$ không thể là số chính phương.	0,25
4b) 0,5đ	+ Theo giả thiết có $0 \equiv 4a^2 + 4ab + 4b^2 - 3 \equiv 4a^2 + 4a(-a-1) + 4(-a-1)^2 - 3 \pmod{a+b+1}$ hay $(2a+1)^2 \equiv 0 \pmod{a+b+1}$. Từ $a+b+1$ là số nguyên tố suy ra $(2a+1):(a+b+1)$.	0,25
	+ Ta có $0 < 2a+1 < 2(a+b+1)$ nên xảy ra $a+b+1 = 2a+1 \Leftrightarrow a = b$. Khi đó có $\begin{cases} a+b-1 = 2a-1 \\ 4(a^2+ab+b^2)-3 = 12a^2-3 = 3(2a+1)(2a-1) \end{cases}$ suy ra $(4(a^2+ab+b^2)-3):(a+b-1)$.	0,25

Câu 5: (1,5 điểm)

a) Xét x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xy + yz + zx \leq xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = xy^2 + yz^2 + zx^2 - 18(x + y + z)$.

b) Cho bảng hình chữ nhật gồm 2 dòng và n cột, được chia đều thành $2n$ ô vuông đơn vị. Ban đầu, trong mỗi ô vuông đơn vị người ta đặt đúng một viên bi có kích thước rất nhỏ. Ta gọi mỗi biến đổi (T) là việc thực hiện các thao tác sau: Chọn ra hai ô vuông đơn vị tùy ý có chứa bi, chuyển từ mỗi ô vuông đó đi một viên bi sang ô vuông đơn vị liền kề (hai ô vuông đơn vị gọi là liền kề nếu chúng có chung cạnh). Tìm tất cả các số nguyên dương n để sau hữu hạn lần chỉ thực hiện biến đổi (T), ta có thể đưa hết tất cả các viên bi có trên bảng lúc đầu về nằm trong cùng một ô vuông đơn vị của bảng.

Ý	Nội dung	Điểm
5a) 0,75đ	+ Từ giả thiết có $1 \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$. Dùng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz có $xy^2 + yz^2 + zx^2 \geq \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) (xy^2 + yz^2 + zx^2) \geq (y + z + x)^2.$	0,25
	+ Suy ra $Q \geq (x + y + z)^2 - 18(x + y + z) = (x + y + z - 9)^2 - 81 \geq -81$.	0,25
	Khi $x = y = z = 3$ thì các giả thiết được thỏa mãn và $Q = -81$. Vậy giá trị nhỏ nhất của Q bằng -81 .	0,25
	Cách khác: $Q + 81 \geq xy^2 - 18y + \frac{81}{x} + yz^2 - 18z + \frac{81}{y} + zx^2 - 18x + \frac{81}{z}$	

	$= x\left(y - \frac{9}{x}\right)^2 + y\left(z - \frac{9}{y}\right)^2 + z\left(x - \frac{9}{z}\right)^2 \geq 0.$								
5b) 0,75đ	+ Xét n là số lẻ: Ta tô màu các ô vuông đơn vị theo kiểu xen kẽ như bàn cờ vua bởi hai màu đen, trắng. Gọi B, W lần lượt là số bi nằm ở ô đơn vị màu đen, số bi nằm ở ô đơn vị màu trắng. - Lúc đầu: $B = n$ và $W = n$. Như vậy B, W là các số lẻ. - Chỉ ra được bất biến: Sau mỗi lần thực biến đổi (T) thì tính chẵn lẻ của B, W là không thay đổi.	0,25							
	- Suy ra lúc nào cũng có bi nằm ở ô đen và lúc nào cũng có bi nằm ở ô trắng (vì B, W luôn là số lẻ), vậy không thể dồn hết tất cả các viên bi về một ô vuông đơn vị.	0,25							
	+ Xét n là số chẵn: Ta chỉ ra cách dồn được bi theo yêu cầu. • Đầu tiên ta chọn hai ô vuông phân biệt mà mỗi ô vuông tương ứng đều nằm ở cuối cùng của mỗi dòng và phải có bi, thực hiện biến đổi (T) để dồn hết bi từ hai ô này về hai ô đứng liền trước chúng. Lại thực hiện tiếp biến đổi (T) với hai ô đơn vị có bi mà mỗi ô nằm ở đầu ngoài cùng của mỗi dòng để dồn hết bi của hai ô này về hai ô đứng liền sau chúng. Tiếp tục với hai cách chọn ô như vậy (chọn cặp ô có bi ở cuối dòng rồi lại chọn cặp ô có bi ở đầu dòng) ta đi đến trạng thái bi chỉ còn nằm ở bảng con 2×2 ở chính giữa của bảng ban đầu như hình 1 (các chữ cái ghi trong ngoặc là để chỉ tên của ô, các số chỉ số lượng bi đang có ở ô tương ứng đó). <table border="1"><tr><td>$\frac{n}{2}$ (A)</td><td>$\frac{n}{2}$ (B)</td></tr><tr><td>$\frac{n}{2}$ (C)</td><td>$\frac{n}{2}$ (D)</td></tr></table> Hình 1 • Tiếp theo chọn cặp ô B, C và thực hiện $\frac{n}{2}$ lần biến đổi (T) (bi từ ô B đưa sang ô A, bi từ ô C đưa sang ô D) thì thu được trạng thái như hình 2. <table border="1"><tr><td>n (A)</td><td>0 (B)</td></tr><tr><td>0 (C)</td><td>n (D)</td></tr></table> Hình 2 • Tiếp tục, ta liên tục chọn cặp ô A, D cho đến khi hết bi và chuyển bi ở hai ô này sang ô C thì sau cùng đưa được $2n$ viên bi về hết ô C. Vậy tập hợp tất cả các số n cần tìm là tập các số nguyên dương chẵn.	$\frac{n}{2}$ (A)	$\frac{n}{2}$ (B)	$\frac{n}{2}$ (C)	$\frac{n}{2}$ (D)	n (A)	0 (B)	0 (C)	n (D)
$\frac{n}{2}$ (A)	$\frac{n}{2}$ (B)								
$\frac{n}{2}$ (C)	$\frac{n}{2}$ (D)								
n (A)	0 (B)								
0 (C)	n (D)								

Chú ý:

- Nếu thí sinh làm đúng, cách giải khác với hướng dẫn chấm, phù hợp kiến thức của chương trình THCS thì tổ chấm thống nhất cho điểm thành phần đảm bảo tổng điểm như hướng dẫn quy định.
- Tổng điểm toàn bài không làm tròn.

----- HẾT -----