

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi gồm có 01 trang)

Đề thi môn: **TOÁN**Thời gian thi: **120 phút** (Không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: 05 tháng 04 năm 2023

Câu 1: (3,0 điểm)

- a. Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 3$
- b. Cho a, b, c là các số nguyên thỏa mãn $a + b + 2024c = c^3$.
Chứng minh rằng $a^3 + b^3 + c^3$ chia hết cho 6

Câu 2: (4,5 điểm)

- a. Giải phương trình $(x + 1)^3 + (x + 2)^3 = (2x + 3)^3$
- b. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:
- $$\frac{a}{ab + a + 1} + \frac{b}{bc + b + 1} + \frac{c}{ca + c + 1} = 1$$

Câu 3: (4,5 điểm)

- a. Biết rằng đa thức $P(x)$ chia cho $x - 1$ dư 2, $P(x)$ chia cho $x^2 + 1$ dư $3x + 4$.
Tìm đa thức dư trong phép chia $P(x)$ cho $(x - 1)(x^2 + 1)$.
- b. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn: $0 \leq a, b, c \leq 2$ và $a + b + c = 3$.
Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2 + c^2$.

Câu 4: (7,0 điểm)

- Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$). Đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H .
Gọi K là giao điểm của đường thẳng EF và đường thẳng BC . AD cắt EF tại I .
Chứng minh rằng:
- a. Tam giác BDF đồng dạng với tam giác BAC .
- b. $AH \cdot BE \cdot CF + BH \cdot AD \cdot CF + CH \cdot AD \cdot BE = 2 \cdot AD \cdot BE \cdot CF$.
- c. $\frac{1}{KE} + \frac{1}{KF} = \frac{2}{KI}$.

Câu 5: (1,0 điểm)

Cho đa giác lồi 66 cạnh. Tại mỗi đỉnh của đa giác viết một số tự nhiên nhỏ hơn 2023. Chứng minh rằng tồn tại hai đường chéo của đa giác sao cho hiệu hai số viết ở hai đầu mỗi đường chéo bằng nhau.

-----**HẾT**-----

Họ tên thí sinh: Số báo danh:

Thí sinh không được sử dụng tài liệu, giám thị coi thi không giải thích gì thêm.

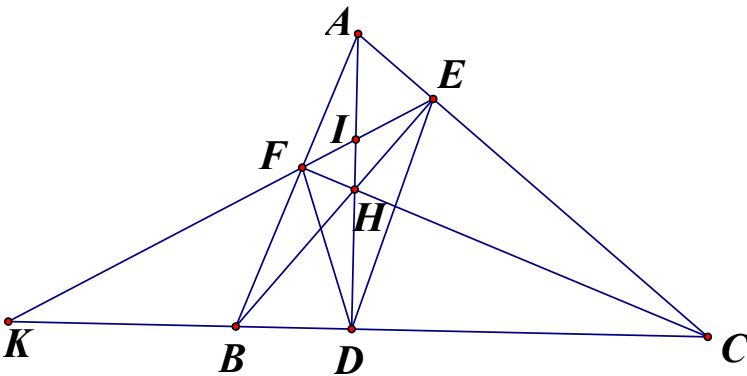
HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI OLYMPIC LỚP 8

Năm học: 2022 – 2023

Đề thi môn: **Toán**

THAM KHẢO

TT	Ý	Nội dung	Điểm
Câu 1	a. 2.0 đ	$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 3 \Rightarrow 2x + y = 3xy$ $\Leftrightarrow x(2 - 3y) + y = 0$ $\Leftrightarrow 3x(2 - 3y) + 3y = 0$ $\Leftrightarrow 3x(2 - 3y) - (2 - 3y) = -2$ $\Leftrightarrow (3x - 1)(2 - 3y) = -2$ Chia ra 4 trường hợp, mỗi TH giải đúng $\begin{cases} 3x - 1 = -2 \\ 2 - 3y = 1 \end{cases}, \begin{cases} 3x - 1 = -1 \\ 2 - 3y = 2 \end{cases}, \begin{cases} 3x - 1 = 1 \\ 2 - 3y = -2 \end{cases}, \begin{cases} 3x - 1 = 2 \\ 2 - 3y = -1 \end{cases}$ Nghiệm của phương trình là $x=1, y=1$.	0.25 0.25 0.25 0.25 0.25x4
	b. 1.0 đ	Ta có, $a^3 + b^3 + c^3$ $= a^3 + b^3 + c^3 + c^3 - a - b - 2024c$ $= (a^3 - a) + (b^3 - b) + 2(c^3 - c) - 2022c$ $= a(a - 1)(a + 1) + b(b - 1)(b + 1) + 2c(c - 1)(c + 1) - 2022c$	0.25 0.25 0.5
Câu 2	a. 2.5 đ	$(x + 1)^3 + (x + 2)^3 = (2x + 3)^3$ $\Leftrightarrow (x + 1)^3 + (x + 2)^3 - (2x + 3)^3 = 0$ $\Leftrightarrow 3(x + 1)(x + 2)(2x + 3) = 0$ $x = -1, x = -2, x = -\frac{3}{2}$	0.25 1.5 0.25x3
	b. 2.0 đ	$\frac{a}{ab + a + 1} + \frac{b}{bc + b + 1} + \frac{c}{ca + c + 1}$ $= \frac{abc}{ab \cdot bc + a \cdot bc + bc} + \frac{b}{bc + b + 1} + \frac{b}{ca \cdot b + 1}$ $= \frac{1}{b + 1 + bc} + \frac{b}{bc + b + 1} + \frac{bc}{1 + bc + b} = 1$	1.0 0.5 0.5
Câu 3	a. 2.5 đ	Gọi đa thức thương là $Q(x)$, đa thức dư là $ax^2 + bx + c$ Ta có: $P(x) = (x - 1)(x^2 + 1).Q(x) + ax^2 + bx + c$ $= (x - 1)(x^2 + 1).Q(x) + a(x^2 + 1) + bx + c - a$ Vì $P(x)$ chia cho $x - 1$ dư 2 nên ta có, $P(1) = 2$ $\Rightarrow a + b + c = 2$ Vì $P(x)$ chia cho $x^2 + 1$ dư $3x + 4$ nên $\begin{cases} b = 3 \\ c - a = 4 \end{cases}$ Suy ra $a = -\frac{5}{2}, b = 3, c = \frac{3}{2}$ Vậy đa thức dư là $-\frac{5}{2}x^2 + 3x + \frac{3}{2}$	0.5 0.5 0.5 0.5 0.5

	b. 2.0 đ - Ta có $a^2 + 1 \geq 2a$ $b^2 + 1 \geq 2b$ $c^2 + 1 \geq 2c$ $\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a + b + c)$ $\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq 3.$ Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = 1$ Vậy Min $P = 3$ khi $a = b = c = 1$ - Ta có $P = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$ $= 9 - 2(ab + bc + ca)$ Vì $0 \leq a, b, c \leq 2$ nên $\begin{cases} (a-2)(b-2)(c-2) \leq 0 \\ -abc \leq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} abc + 4(a + b + c) - 2(ab + bc + ca) - 8 \leq 0 \\ -abc \leq 0 \end{cases}$ $\Rightarrow ab + bc + ca \geq 2 \Rightarrow P \leq 5.$ Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi trong 3 số a, b, c có một số bằng 2, một số bằng 0, một số bằng 1 Vậy Max $P = 5$ khi (a, b, c) là hoán vị của bộ số $(0, 1, 2)$	0.25 0.25 0.25 0.25 0.25 0.25
Câu 4		
a. 3.0 đ	$\Delta BDA \sim \Delta BFC$ (g.g) $\Rightarrow \frac{BD}{BA} = \frac{BF}{BC}$ $\Rightarrow \Delta BDF \sim \Delta BAC$ (c.g.c)	1.0 1.0 1.0
b. 3.0 đ	$\frac{AH}{AD} = \frac{S_{ABH}}{S_{ABD}} = \frac{S_{ACH}}{S_{ACD}} = \frac{S_{ABH} + S_{ACH}}{S_{ABD} + S_{ACD}} = \frac{S_{ABH} + S_{ACH}}{S_{ABC}}$ $\frac{BH}{BE} = \frac{S_{ABH} + S_{BCH}}{S_{ABC}}$ $\frac{CH}{CF} = \frac{S_{BCH} + S_{ACH}}{S_{ABC}}$ $\Rightarrow \frac{AH}{AD} + \frac{BH}{BE} + \frac{CH}{CF} = \frac{2S_{ABC}}{S_{ABC}} = 2$ $\Rightarrow AH \cdot BE \cdot CF + BH \cdot AD \cdot CF + CH \cdot AD \cdot BE = 2 \cdot AD \cdot B$	1.0 0.5 0.5 0.5 0.5
c. 1.0 đ	$\Delta BDF \sim \Delta BAC \Rightarrow \widehat{BDF} = \widehat{BAC}$ Tương tự: $\Delta CDE \sim \Delta CAB \Rightarrow \widehat{CDE} = \widehat{CAB}$ $\Rightarrow \widehat{BDF} = \widehat{CDE} \Rightarrow \widehat{FDA} = \widehat{EDA}$ Xét tam giác DEF có DI là phân giác trong, DI	0.25 0.25

