

I. PHẦN CHUNG (dành cho tất cả các thí sinh)

Bài 1. (4,0 điểm)

1) Rút gọn biểu thức: $P = \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x + 1} : \left(\frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2-x^2}{x^2-x} \right)$ với $(x \neq 0; x \neq \pm 1)$

2) Phân tích các đa thức sau thành nhân tử: $x^4 - 5x^2 + 4$;

3) Cho $4x^2 - 10x + 3 = 0$. Tính giá trị của biểu thức: $Q = 32x^5 + \frac{243}{32x^5}$.

Bài 2. (3,0 điểm)

1) Tìm cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện: $x^2 + 2y^2 + 2xy + y = 2$.

2) Tìm các số tự nhiên n để $(n^2 - 8)^2 + 36$ là số nguyên tố.

Bài 3. (3,0 điểm)

1) Tìm đa thức $f(x)$ biết $f(x)$ chia cho $(x-3)$ dư 2; $f(x)$ chia cho $(x+4)$ dư 9 và $f(x)$ chia cho $(x^2 + x - 12)$ được thương là $(x^2 + 3)$ và còn dư.

2) Giải phương trình: $(2x-5)^3 + (2-x)^3 = (x-3)^3 + (x-3)(7x^2 - 2052x + 2054)$

Bài 4. (6,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn có các đường cao AD ; BE và CF cắt nhau tại H . Qua B kẻ đường thẳng song song với CF cắt tia AD tại K .

1) Chứng minh $\triangle AEF$ đồng dạng $\triangle ABC$

2) Chứng minh $AB^2 = AD \cdot AK$ và $\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = 1$

3) Gọi I là trung điểm BC . Tia HI cắt BK tại N . Chứng minh AN vuông góc EF

II. PHẦN RIÊNG

1. Dành cho thí sinh bảng A

Bài 5. (4,0 điểm)

1) Cho $x > 0, y > 0$ và $x \geq 3 - y$. Tìm GTNN của biểu thức: $A = 2x^2 + y^2 + \frac{28}{x} + \frac{1}{y} + 2023$

2) Cho tam giác ABC , M là điểm di chuyển trên đoạn BC . Từ M kẻ MD song song với AC , ME song song với AB (D thuộc AB ; E thuộc AC). Xác định vị trí của M để diện tích tứ giác $ADME$ lớn nhất.

3) Giải bóng đá của một trường THCS có 10 đội tham gia thi đấu vòng tròn một lượt (hai đội bất kỳ đều thi đấu với nhau một trận và phân rõ thắng - thua). Biết rằng đội thứ nhất thắng a_1 trận và thua b_1 trận, đội thứ hai thắng a_2 trận và thua b_2 trận, ..., đội thứ 10 thắng a_{10} trận và thua b_{10} trận. Chứng minh rằng: $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_{10}^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \dots + b_{10}^2$.

2. Dành cho thí sinh bảng B

Bài 5. (4,0 điểm)

1) Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ nhận giá trị nguyên với mọi x nguyên chứng minh rằng $2a; b-a$ và c là các số nguyên và ngược lại.

2) Cho x, y là các số lớn hơn hoặc bằng 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy}$$

----- Hết -----

Họ và tên thí sinh: ; Số báo danh:

HƯỚNG DẪN CHẤM

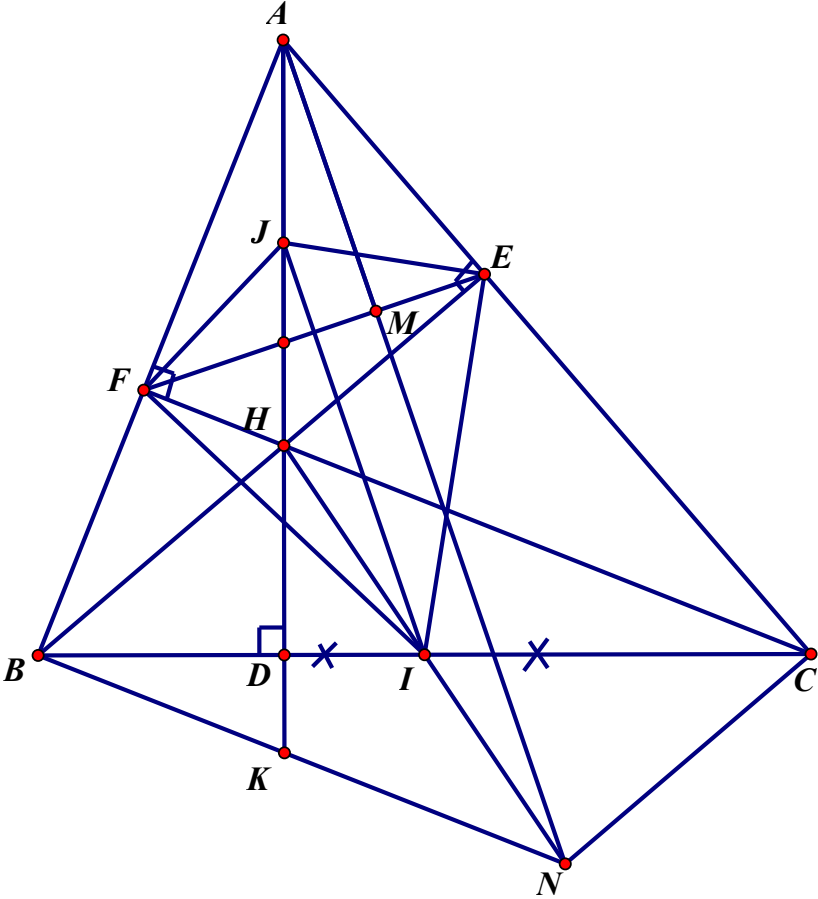
Bài 1	Hướng dẫn giải	Thang điểm
1.1		
(1,5điểm)	$P = \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x + 1} : \left(\frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2-x^2}{x^2-x} \right)$	
	$P = \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \left[\frac{x^2-1}{x(x-1)} + \frac{x}{x(x-1)} + \frac{2-x^2}{x(x-1)} \right]$	0,25 đ
	$P = \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \frac{x+1}{x(x-1)}$	0,25 đ
	$P = \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} \cdot \frac{x(x-1)}{x+1}$	0,5 đ
	$P = \frac{x^2}{x-1}$ Vậy $P = \frac{x^2}{x-1}$ (với $x \neq 0; x \neq 1; x \neq -1$)	0,5 đ
1.2 (1,5điểm)	$\begin{aligned} & x^4 - 5x^2 + 4 \\ &= x^4 - 4x^2 - x^2 + 4 \\ &= (x^4 - 4x^2) - (x^2 - 4) \\ &= x^2(x^2 - 4) - (x^2 - 4) \\ &= (x^2 - 4)(x^2 - 1) \\ &= (x+2)(x-2)(x+1)(x-1) \end{aligned}$	0.5 0.25 0.25 0.25 0.25
1.3 (1,0 điểm)	+Ta thấy $x = 0$ thì $VT = 3 \neq VP \Rightarrow x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình $4x^2 - 10x + 3 = 0$ (1). Do đó $x \neq 0$. $\Rightarrow (1) \Leftrightarrow 2x + \frac{3}{2x} - 5 = 0 \Rightarrow 2x + \frac{3}{2x} = 5$ Đặt : $\begin{cases} a = 2x \\ b = \frac{3}{2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=5 \\ a.b=3 \end{cases}$ Mà: $Q = 32x^5 + \frac{243}{32x^5} = (2x)^5 + \left(\frac{3}{2x}\right)^5 = a^5 + b^5$ $\begin{aligned} *a^2 + b^2 &= (a+b)^2 - 2ab = 19 \\ *a^3 + b^3 &= (a+b)^3 - 3ab(a+b) = 80 \\ Q &= a^5 + b^5 = (a^2 + b^2)(a^3 + b^3) - a^2b^2(a+b) = 19.80 - 3^2.5 = 1475 \end{aligned}$	0.25 0.25 0.25

Bài 2	Hướng dẫn giải	Thang
-------	----------------	-------

		điểm
2.1 (1,5điểm)	$x^2 + 2y^2 + 2xy + y = 2$ $4x^2 + 8y^2 + 8xy + 4y = 8$ $(2x + 2y)^2 + (2y + 1)^2 = 9$ Mà $9 = 0^2 + 3^2$ Mà $2y + 1$ là số nguyên lẻ nên $2y + 1 = \pm 3$ * Trường hợp 1: $2y + 1 = 3$ $y = 1$ Suy ra $x = -1$ * Trường hợp 2: $2y + 1 = -3$ $y = -2$ Suy ra: $x = 2$ Vậy $x = -1; y = 1$ hoặc $x = 2; y = -2$	0,5 đ 0,5 đ 0,5 đ
	$n^2 - 6n + 10)(n^2 + 6n + 10)$ - Đề $(n^2 - 8)^2 + 36$ là số nguyên tố thì: $n^2 - 6n + 10 = 1$ hoặc $n^2 + 6n + 10 = 1$ Xét $n^2 - 6n + 10 = 1 \Leftrightarrow (n - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow n = 3$ Khi đó $(n^2 - 8)^2 + 36 = 37$ là số nguyên tố (thoả mãn) Xét $n^2 + 6n + 10 = 1 \Leftrightarrow (n + 3)^2 = 0 \Leftrightarrow n = -3$ (loại do n là số tự nhiên) Vậy $n = 3$ thoả mãn bài toán.	0,5 đ 0,5 đ 0,5 đ

Bài 3	Nội dung	
3.1. (1,5điểm)	1) Do $f(x)$ chia cho $x^2 + x - 12 = (x - 3)(x + 4)$ được thương là $x^2 + 3$ còn dư nên ta có : $f(x) = (x + 4)(x - 3)(x^2 + 3) + a.x + b$	0.5
	Cho $x = -4 \Rightarrow f(x) = -4a + b = 9$ Cho $x = 3 \Rightarrow f(x) = 3a + b = 2$	0.5
	Khi đó ta có hệ: $\begin{cases} -4a + b = 9 \\ 3a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 5 \end{cases}$	0,5
3.2 (1,5điểm)	Ta có $(2x - 5)^3 + (2 - x)^3 = (x - 3)^3 + (x - 3)(7x^2 - 2052x + 2054)$ Áp dụng hằng đẳng thức $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$ vào vế trái phương trình với $a = 2x - 5; b = 2 - x$ ta được: $(2x - 5)^3 + (2 - x)^3 = (x - 3)^3 - 3(2x - 5)(2 - x)(x - 3)$ Khi đó phương trình trở thành $-3(2x - 5)(2 - x)(x - 3) = (x - 3)(7x^2 - 2052x + 2054)$	0,5
	$\Leftrightarrow (x - 3)[7x^2 - 2052x + 2054 + 3(-2x^2 + 9x - 10)] = 0$ $\Leftrightarrow (3 - x)(x^2 - 2025x + 2024) = 0$	0,5

Bài 3	Nội dung	
	$\Leftrightarrow (3-x)(x-1)(x-2024) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=1 \\ x=2024 \end{cases}$	0,5

Câu 4	Nội dung	
		
4.1. (2,0 điểm)	Ta có $BE \perp AC$ nên $\widehat{AEB} = 90^\circ$	0,25
	Ta có $CF \perp AB$ nên $\widehat{AFC} = 90^\circ$	0,25
	Xét $\triangle AEB$ và $\triangle AFC$ có $\widehat{AEB} = \widehat{AFC} (= 90^\circ)$; $\widehat{BAC}$ chung Suy ra $\triangle AEB \cong \triangle AFC$ (G-G)	0,5
	$\Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$	0,25
	Xét $\triangle AEF$ và $\triangle ABC$ có: $\widehat{BAC}$ chung $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$ (Chứng minh trên)	0,5

Câu 4	Nội dung	
	Suy ra $\triangle AEF \cong \triangle ABC$ (C-G-C)	0,25
4.2. (2,0 điểm)	Ta có $BK \parallel CF$ mà $CF \perp AB$ Suy ra $BK \perp AB \Rightarrow \widehat{ABK} = 90^\circ$	0,25
	$AD \perp BC \Rightarrow \widehat{ADB} = 90^\circ$ $\Rightarrow \widehat{ABK} = \widehat{ADB} = 90^\circ$	0,25
	Xét $\triangle ABD$ và $\triangle AKB$ có $\widehat{ABK} = \widehat{ADB} (= 90^\circ)$ $\widehat{BAK}$ chung Suy ra $\triangle ABD \cong \triangle AKB$ (g-g)	0,25
	$\Rightarrow \frac{AB}{AK} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow AB^2 = AD \cdot AK$ (đpcm)	0,25
	Ta có $\frac{HD}{AD} = \frac{S_{HBC}}{S_{ABC}}$ ($\triangle HBC$ và $\triangle ABC$ có chung cạnh đáy BC)	0,25
	$\frac{HE}{BE} = \frac{S_{AHC}}{S_{ABC}}$ ($\triangle AHC$ và $\triangle ABC$ có chung cạnh đáy AC)	0,25
	$\frac{HF}{CF} = \frac{S_{HAB}}{S_{ABC}}$ ($\triangle HAB$ và $\triangle ABC$ có chung cạnh đáy AB)	0,25
	$\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = \frac{S_{HBC} + S_{AHC} + S_{HAB}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1$ (đpcm)	0,25
	Ta có $CF \parallel BN$ (GT) suy ra $\widehat{IBN} = \widehat{ICH}$ (hai góc so le trong) Xét $\triangle IBN$ và $\triangle ICH$ có $\widehat{BIN} = \widehat{CIH}$ (đối đỉnh) $IB = IC$ (GT) $\widehat{IBN} = \widehat{ICH}$ (chứng minh trên)	0,25
	Do đó $\triangle IBN = \triangle ICH$ (G - C - G)	0,25
4.3. (2,0 điểm)	$\Rightarrow IH = IN$ (hai cạnh tương ứng) $\Rightarrow I$ là trung điểm HN	0,25
	Gọi J là trung điểm AH Xét $\triangle AHN$ có I là trung điểm HN (Chứng minh trên) J là trung điểm AH (cách vẽ) $\Rightarrow IJ$ là đường trung bình của $\triangle AHN$	0,25
	Suy ra $IJ \parallel AN$ (1)	0,25
	Chỉ ra $IE = IF \left(= \frac{BC}{2} \right)$ Chỉ ra $JE = JF \left(= \frac{AH}{2} \right)$	0,25

3 (1 điểm)	Suy ra $\frac{a}{\sqrt{S}} + \frac{b}{\sqrt{S}} = \frac{BM}{BC} + \frac{CM}{BC} = 1$ Suy ra: $S = (a+b)^2$ Suy ra $S_{ADME} = 2ab \leq \frac{(a+b)^2}{2} = \frac{1}{2}S_{ABC}$ Dấu “=” xảy ra khi a = b, khi M là trung điểm BC.	0,5 0,25
	Vì 10 đội bóng tham gia thi đấu vòng tròn một lượt (hai đội bất kỳ đều thi đấu với nhau một trận), nên mỗi đội bóng sẽ lần lượt thi đấu với 9 đội bóng còn lại. Các trận đấu luôn có 1 đội thắng, 1 đội thua, Do đó: + Mỗi đội bóng sẽ thi đấu 9 trận $\Rightarrow a_i + b_i = 9 (1 \leq i \leq 10; i \in \mathbb{N}) \Rightarrow b_i = 9 - a_i$. + Tổng số trận đấu là $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ trận, Tổng số trận thắng của 10 đội bằng tổng số trận đấu $\Rightarrow a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = 45$. Xét: $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \dots + b_{10}^2 = (9 - a_1)^2 + (9 - a_2)^2 + (9 - a_3)^2 + \dots + (9 - a_{10})^2$ $= 81 - 18a_1 + a_1^2 + 81 - 18a_2 + a_2^2 + 81 - 18a_3 + a_3^2 + \dots + 81 - 18a_{10} + a_{10}^2$ $= 810 - 18(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10}) + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_{10}^2$ $= 810 - 18 \cdot 45 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_{10}^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_{10}^2$. Vậy $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_{10}^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \dots + b_{10}^2$.	0,5 0,5
(2.5 điểm)	$f(x) = \frac{2ax(x+1)}{2} + (b-a)x + c$ * Vì đa thức nhận giá trị nguyên với mọi x nguyên nên chọn x lần lượt các giá trị 0; 1; -1 ta có 2a; b-a; c nguyên * Ngược lại x nguyên; 2a nguyên; b-a nguyên; c nguyên thì đa thức nhận giá trị nguyên với mọi x nguyên (chú ý x(x+1) chia hết cho 2	0,5 1,0 1,0
(1.5 điểm)	$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy} \quad (1)$ $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+xy} \right) + \left(\frac{1}{1+y^2} - \frac{1}{1+xy} \right) \geq 0$ $\Leftrightarrow \frac{x(y-x)}{(1+x^2)(1+xy)} + \frac{y(x-y)}{(1+y^2)(1+xy)} \geq 0$ $\Leftrightarrow \frac{(y-x)^2(xy-1)}{(1+x^2)(1+y^2)} \geq 0 \quad (2)$ Vì $x \geq 1; y \geq 1 \Rightarrow xy \geq 1 \Rightarrow xy - 1 \geq 0 \quad (2)$ $\Rightarrow$ BĐT (2) đúng nên BĐT (1) đúng. Dấu “=” xảy ra khi $x = y$	0.5 0.5 0.5

--	--	--