

ĐỀ CHÍNH THỨC – VÒNG 1

Bài 1 (4,0 điểm):

a) Cho $ax^3 = by^3 = cz^3$ và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.

Chứng minh rằng $\sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$

b) Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 + 6x + 9} = \frac{15}{2}x$

Bài 2 (4,0 điểm):

a) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} xy(x-3)(y+2) = -6 \\ x^2 + y^2 - 3x + 2y = 1 \end{cases}$$

b) Cho a, b là các số thực

b₁) Chứng minh $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$

b₂) Biết $a^2 + b^2 = 2$, hãy tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $M = 3(a+b) + ab$

Bài 3 (4,0 điểm): Cho hình thang ABCD (AB // CD). Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Qua O vẽ đường thẳng song song với AB cắt AD tại E và cắt BC tại F.

a) Chứng minh hai tam giác AOD và BOC có diện tích bằng nhau.

b) Chứng minh $\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{2}{EF}$.

c) Gọi K là điểm bất kỳ trên đoạn thẳng OE, M là trung điểm của FD. Vẽ EN song song với KM (N ∈ FD). Chứng minh đường thẳng KN chia tam giác DEF thành hai phần có diện tích bằng nhau.

Bài 4 (4,0 điểm): Từ điểm A nằm ngoài đường tròn tâm O, ta vẽ hai tiếp tuyến AB, AC (B và C là hai tiếp điểm). Vẽ cát tuyến AEF không đi qua tâm O (E nằm giữa A và F, O và B nằm về hai phía của cát tuyến). Gọi K là trung điểm của EF.

a) Chứng minh 5 điểm A, B, K, O, C cùng thuộc một đường tròn và KA là phân giác của góc BKC.

b) Vẽ dây ED vuông góc với OB sao cho ED cắt BC tại M. Gọi H là giao điểm của AK và BC. Chứng minh $AH \cdot AK = AE \cdot AF$.

c) Chứng minh FM đi qua trung điểm I của AB.

Bài 5 (4,0 điểm):

a) Tìm tất cả các số nguyên tố p để $4p^2 + 1$ và $6p^2 + 1$ cũng là số nguyên tố.

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $4x^2 + y^2 + 4x - 6y - 24 = 0$

ĐỀ CHÍNH THỨC – VÒNG 2

Bài 1 (4,0 điểm):

a) Cho hai số thực x và y thỏa mãn $(x + \sqrt{x^2 + 2021})(y + \sqrt{y^2 + 2021}) = 2021$. Chứng minh rằng $\sqrt{x^2 + 2021} - x = y + \sqrt{y^2 + 2021}$ rồi tính giá trị của $A = x + y$.

b) Giải phương trình: $4x + 1 - \sqrt{9(x+1)(2x-1)} + 2\sqrt{2x-1} - 2\sqrt{x+1} = 0$

Bài 2 (4,0 điểm):

a) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x-y)(x^2-y^2) = 3 \\ (x+y)(x^2+y^2) = 15 \end{cases}$$

b) Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh:

$$b_1) \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} \right) \quad b_2) \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \leq \frac{3}{2}$$

Bài 3 (4,0 điểm): Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ ($R < R'$) cắt nhau tại A và B . Trên nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng OO' có chứa điểm A vẽ tiếp tuyến chung IM (I và M theo thứ tự là các tiếp điểm trên (O) và (O')). Tiếp tuyến IM cắt đường thẳng OO' tại P . Vẽ tiếp tuyến PN với đường tròn (O') (N là tiếp điểm, $N \neq M$). Gọi K là giao điểm của đường thẳng AB với IM .

a) Chứng minh hai tam giác KIA và KBI đồng dạng và K là trung điểm của IM .

b) Đường thẳng PA cắt đường tròn (O') tại điểm thứ hai là Q . Gọi H là giao điểm của đường thẳng PO với MN . Chứng minh hai tam giác PAH và $PO'Q$ đồng dạng.

Bài 4 (4,0 điểm): Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O , H là trực tâm. Gọi I là trung điểm của BC . Vẽ đường kính BK của đường tròn tâm O .

a) Chứng minh $AHCK$ là hình bình hành. Suy ra $OI = \frac{1}{2}AH$.

b) Gọi Ax là phân giác của $\widehat{BAC}$ và Ay phân giác của góc ngoài tại đỉnh A của $\triangle ABC$. Gọi M và N theo thứ tự là hình chiếu của H trên Ax và Ay . Tia Ax cắt đường tròn tâm O tại D (D khác A). Chứng minh OD vuông góc với BC và MN song song với AO .

c) Gọi E là giao điểm MN với AH . Chứng minh ba điểm M, I, N thẳng hàng.

Bài 5 (4,0 điểm):

a) Cho a, b, c, d là các số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh: $a^2 - 1$ chia hết cho 24 rồi suy ra $a^2 - b^2 + c^2 - d^2$ chia hết cho 24.

b) Cho đường thẳng $(d): y = ax + b$ đi qua điểm $P(2; 7)$. Tìm các số nguyên a và b sao cho đường thẳng (d) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là một số nguyên âm, cắt trục tung tại một điểm có tung độ là một số nguyên dương.

=====HẾT=====