

Câu I (2,0 điểm)

1) Giải phương trình $\sqrt{x-3} - \sqrt{2x-7} = 2x-8$.

2) Cho a, b và c là các số thực khác 0 thỏa mãn điều kiện $a^2 - c^2 = c, c^2 - b^2 = b$ và $b^2 - a^2 = a$.

Chứng minh $(a-b)(b-c)(c-a) = 1$

Câu II (2,0 điểm)1) Cho ba số nguyên a, b và c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 - 2abc$ chia hết cho 6. Chứng minh abc chia hết cho 54.

2) Tìm tất cả cặp số nguyên dương (x, y) thỏa mãn $x^3y - x^2y - 4x^2 + 5xy - y^2 = 0$.

Câu III (2,0 điểm)1) Tìm tất cả cặp số nguyên (x, y) sao cho xy là số chính phương và $x^2 + xy + y^2$ là số nguyên tố.2) Với các số thực không âm a, b và c thỏa mãn $a + 2b + 3c = 1$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (a + 6b + 6c)(a + b + c)$.**Câu IV (3,0 điểm)**

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$), nội tiếp đường tròn (O) . Ba đường cao AD, BE và CF của tam giác ABC cùng đi qua điểm H . Đường thẳng EF cắt đường thẳng AD tại điểm Q . Gọi M và I lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC và AH . Đường thẳng IM cắt đường thẳng EF tại điểm K .

1) Chứng minh tam giác AEK đồng dạng với tam giác ABM .2) Đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại điểm S , đường thẳng SI cắt đường thẳng MQ tại điểm T . Chứng minh bốn điểm A, T, H và M cùng thuộc một đường tròn.3) Tia TH cắt đường tròn (O) tại điểm P . Chứng minh ba điểm A, K và P là ba điểm thẳng hàng.**Câu V (1,0 điểm)**

Cho 2023 điểm nằm trong một hình vuông cạnh 1. Một tam giác đều được gọi là phủ điểm M nếu điểm M nằm trong tam giác hoặc nằm trên cạnh của tam giác.

1) Chứng minh tồn tại tam giác đều cạnh $\frac{1}{\sqrt{2}}$ phủ ít nhất 253 điểm trong 2023 điểm đã cho.2) Chứng minh tồn tại tam giác đều cạnh $\frac{11}{12}$ phủ ít nhất 506 điểm trong 2023 điểm đã cho...... **HẾT**

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

2. PHẦN LỜI GIẢI

Câu 1: (2,0 điểm)

1. Giải phương trình

$$\sqrt{x-3} - \sqrt{2x-7} = 2x-8$$

2. Cho a, b, c là các số thực khác 0 thỏa mãn điều kiện $a^2 - c^2 = c, c^2 - b^2 = b$ và $b^2 - a^2 = a$. Chứng minh

$$(a-b)(b-c)(c-a) = 1$$

Lời giải.

1) Điều kiện xác định $x \geq \frac{7}{2}$.

Sử dụng nhân liên hợp, ta có phương trình ban đầu tương đương với

$$\frac{x-3-2x+7}{\sqrt{x-3} + \sqrt{2x-7}} = 2x-8.$$

Chuyển vế, rút nhân tử chung ta được

$$(x-4) \left(2 + \frac{1}{\sqrt{x-3} + \sqrt{2x-7}} \right) = 0.$$

Ta có $\sqrt{x-3} \geq 0, \sqrt{2x-7} \geq 0$ nên $2 + \frac{1}{\sqrt{x-3} + \sqrt{2x-7}} > 0$ với mọi $x \geq \frac{7}{2}$, kéo theo $x = 4$ (thỏa mãn điều kiện xác định).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 4$.

2) Theo đề bài ta có $a^2 - c^2 + c^2 - b^2 = c + b$ và $a, b, c \neq 0$ nên $a^2 - b^2 = c + b$. Nếu $a + b = 0$ thì $a = -b$. Tuy nhiên khi đó $a = b^2 - a^2 = 0$ là trái giả thiết. Do đó, ta phải có $a + b \neq 0$ dẫn tới $a - b = \frac{c+b}{a+b}$.

Hoàn toàn tương tự ta có $b - c = \frac{c+a}{b+c}$ và $c - a = \frac{a+b}{c+a}$.

Từ đây ta suy ra

$$(a-b)(b-c)(c-a) = \frac{c+b}{a+b} \cdot \frac{c+a}{b+c} \cdot \frac{a+b}{c+a} = 1.$$

Đây chính là điều phải chứng minh.

□

Câu 2: (2,0 điểm)

1) Cho ba số nguyên a, b và c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 - 2abc$ chia hết cho 6. Chứng minh abc chia hết cho 54

2) Tìm tất cả cặp số nguyên dương (x, y) thỏa mãn $x^3y - x^2y - 4x^2 + 5xy - y^2 = 0$.

Lời giải.

1) Nếu cả ba số a, b, c đều lẻ thì $a^2 + b^2 + c^2 - 2abc$ sẽ lẻ và do đó $a^2 + b^2 + c^2 - 2abc$ không chia hết cho 6, trái giả thiết. Do đó, trong ba số a, b, c phải có ít nhất một số chẵn, nghĩa là abc chia hết cho 2.

Nếu abc không chia hết cho 3 tức là trong 3 số a, b, c không có số nào chia hết cho 3, dẫn tới $a^2 \equiv b^2 \equiv c^2 \equiv 1 \pmod{3}$. Vì $a^2 + b^2 + c^2 - 2abc$ chia hết cho 3 nên $-2abc$ cũng chia hết cho 3, vô lí vì a, b, c đều không chia hết cho 3. Do đó, ta phải có abc chia hết cho 3. Từ đây ta có ngay $a^2 + b^2 + c^2$ chia hết cho 3. Vì số chính phương khi chia 3 thì dư chỉ có thể là 0, 1 cả 3 số a^2, b^2, c^2 phải chia hết cho 3 kéo theo a, b, c đều chia hết cho 3. Khi đó abc chia hết cho 27.

Vì $(27, 2) = 1$ nên abc chia hết cho $27 \cdot 2 = 54$. Phép chứng minh hoàn tất.

2) Phương trình đã cho được viết lại thành

$$y^2 - (x^3 - x^2 + 5x)y + 4x^2 = 0.$$

Coi phương trình trên là phương trình bậc hai ẩn y , tính biệt thức

$$\Delta = (x^3 - x^2 + 5x)^2 - 16x^2 = x^2(x^2 - x + 1)(x^2 - x + 9).$$

Điều kiện cần để phương trình có nghiệm y nguyên là Δ là số chính phương. Suy ra $(x^2 - x + 1)(x^2 - x + 9)$ là số chính phương (do x nguyên dương nên $x^2 > 0$). Vì $x^2 - x + 1 = x(x - 1) + 1$ là số lẻ và nếu gọi $d = \gcd(x^2 - x + 1, x^2 - x + 9)$ thì d lẻ và $d \mid (x^2 - x + 9) - (x^2 - x + 1) = 8$ nên ta phải có $d = 1$. Suy ra $x^2 - x + 1, x^2 - x + 9$ đều là các số chính phương. Mà

$$(x - 1)^2 < x^2 - x + 1 < (x + 1)^2$$

nên $x^2 - x + 1 = x^2$ và tìm được $x = 1$. Thay $x = 1$ tìm được $y = 1, y = 4$. Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm nguyên dương (x, y) là $(1, 1)$ và $(1, 4)$.

□

Câu 3: (2,0 điểm)

- 1) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) sao cho xy là số chính phương và $x^2 + xy + y^2$ là số nguyên tố.
- 2) Với các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a + 2b + 3c = 1$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (a + 6b + 6c)(a + b + c)$.

Lời giải.

- 1) Đặt $xy = z^2$ với $z \in \mathbb{N}$ thì $x^2 + xy + y^2 = x^2 + y^2 + z^2 = (x + y)^2 - z^2 = (x + y - z)(x + y + z)$.
 Chú ý là $xy = z^2 \geq 0$ nên x, y ở cùng phía với 0. Và nếu cặp (x, y) thỏa mãn thì cặp $(-x, -y)$ cũng thỏa mãn, do đó ta chỉ cần xét $x, y \geq 0$. Khi đó $x + y + z \geq x + y - z$ và do $x^2 + y^2 + z^2$ là số nguyên tố nên ta phải có $x + y - z = 1, x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z$. Do $x, y, z \in \mathbb{N}$ nên $x^2 \geq x, y^2 \geq y, z^2 \geq z$ nên để có đẳng thức $x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z$ thì $x^2 = x, y^2 = y, z^2 = z$. Suy ra $x, y \in \{0, 1\}$. Thử trực tiếp thì chỉ có $x = y = 1$ là thỏa mãn bài toán.

Vậy, có hai cặp (x, y) là $(1, 1), (-1, -1)$.

- 2) Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\frac{3}{2}P \geq \left(\frac{1}{2}a + 3b + 3c\right)(3a + 3b + 3c) \geq \left(\sqrt{\frac{3}{2}}a + 3b + 3c\right)^2 \geq (a + 2b + 3c)^2 = 1.$$

Suy ra $P \geq \frac{2}{3}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 0, c = \frac{1}{3}$. Giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{2}{3}$.

Lại có, theo bất đẳng thức AM-GM thì

$$4P = (a + 6b + 6c)(4a + 4b + 4c) \leq \frac{(a + 6b + 6c + 4a + 4b + 4c)^2}{4} \leq \frac{25(a + 2b + 3c)^2}{4} = \frac{25}{4},$$

kéo theo

$$P \leq \frac{25}{16}.$$

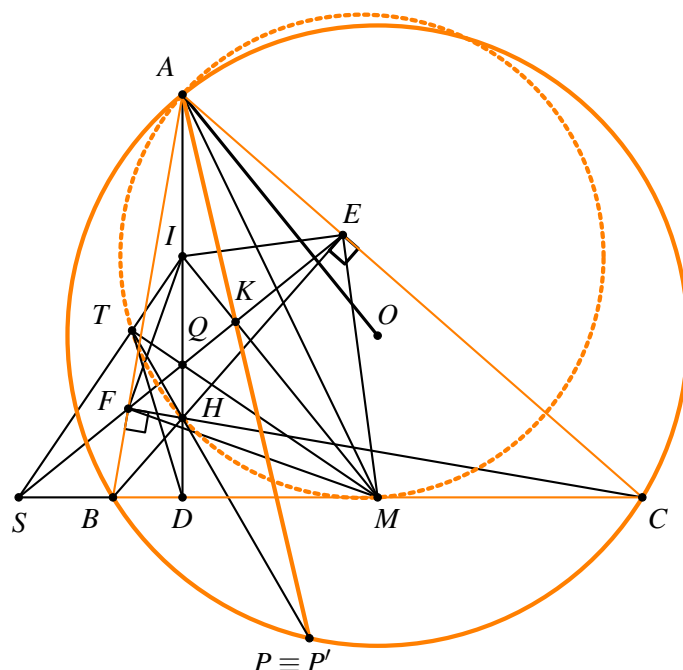
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a + 6b + 6c = 4(a + b + c), c = 0, a + 2b + 3c = 1$. Giải ta tìm được $a = \frac{1}{4}, b = \frac{3}{8}, c = 0$. Giá trị lớn nhất của P là $\frac{25}{16}$.

□

Câu 4: (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$), nội tiếp đường tròn (O) . Ba đường cao AD, BE và CF của tam giác ABC cùng đi qua điểm H . Đường thẳng EF cắt đường thẳng AD tại điểm Q . Gọi M và I lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC và AH . Đường thẳng IM cắt đường thẳng EF tại điểm K .

- 1) Chứng minh rằng tam giác AEK đồng dạng với tam giác ABM .
- 2) Đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại điểm S , đường thẳng SI cắt đường thẳng MQ tại điểm T . Chứng minh rằng bốn điểm A, T, H và M cùng thuộc một đường tròn.
- 3) Tia TH cắt đường tròn (O) tại điểm P . Chứng minh rằng ba điểm A, K và P thẳng hàng.



Lời giải.

- 1) Xét các tam giác BFC và BEC lần lượt vuông tại F và E với các trung tuyến tương ứng là FM và EM , khi đó ta được $FM = EM = \frac{1}{2}BC$. Tương tự, xét các tam giác AFH và AEH lần lượt vuông tại F và E với các trung tuyến tương ứng là FI và EI , khi đó ta cũng được $FI = EI = \frac{1}{2}AH$. Như vậy, MI là đường trung trực của EF , vì thế K là trung điểm của EF .

Mặt khác, lại chú ý rằng $\triangle AEB \sim \triangle AFC$ (g.g) nên ta được $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$, kéo theo $\triangle AEF \sim \triangle ABC$ (c.g.c). Từ đó ta thu được $\widehat{AEF} = \widehat{ABC}$ và $\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{2EK}{2BM} = \frac{EK}{BM}$. Do đó, $\triangle AEK \sim \triangle ABM$ (c.g.c).

- 2) Xét $\triangle ISM$ với $ID \perp SM$ và $SK \perp IM$ (vì MI là trung trực của EF), vì thế Q là trực tâm của $\triangle ISM$. Như vậy, $MQ \equiv MT \perp SI$ và từ đó ta được $\widehat{ITM} = 90^\circ = \widehat{IEM} = \widehat{IFM}$. Do đó, năm

điểm I, T, E, F, M cùng thuộc một đường tròn và dẫn đến $QT \cdot QM = QE \cdot QF$. Mặt khác, lại chú ý rằng tứ giác $AEHF$ là tứ giác nội tiếp, ta cũng có $QE \cdot QF = QA \cdot QH$. Như vậy, $QT \cdot QM = QA \cdot QH$, vì vậy bốn điểm A, T, H, M cùng thuộc một đường tròn.

- 3) Trên tia TH lấy một điểm P' sao cho $HT \cdot HP' = HA \cdot HD$. Khi đó, ta cũng được $HT \cdot HP' = HB \cdot HE = HC \cdot HF$ và do đó các tứ giác $TBP'E$ và $TCP'F$ là các tứ giác nội tiếp. Khi đó, ta có $\widehat{BP'T} = \widehat{BET} = \widehat{HET}$ và $\widehat{CP'T} = \widehat{CFT} = \widehat{HFT}$. Từ đó, chú ý rằng tứ giác $TIEF$ nội tiếp nên $\widehat{ETF} = \widehat{EIF} = 2\widehat{BAC}$, ta thu được

$$\begin{aligned}\widehat{BP'C} &= \widehat{BP'T} + \widehat{CP'T} = \widehat{HET} + \widehat{HFT} = 360^\circ - \widehat{EHF} - \widehat{ETF} \\ &= 360^\circ - (180^\circ - \widehat{BAC}) - 2\widehat{BAC} = 180^\circ - \widehat{BAC}.\end{aligned}$$

Do đó $P' \in (O)$ và kéo theo $P' \equiv P$. Như vậy, $HA \cdot HD = HT \cdot HP$ nên tứ giác $ATDP$ nội tiếp và $\widehat{DAP} = \widehat{DTH}$. Mặt khác, ta có các kết quả quen thuộc $\widehat{BAO} = \widehat{CAH}$ và $AO \perp EF$, kết hợp với $\triangle AEK \sim \triangle ABM$, ta thu được $\widehat{OAM} = \widehat{BAO} - \widehat{BAM} = \widehat{CAH} - \widehat{EAK} = \widehat{DAK}$ và $IM \parallel AO (\perp EF)$. Lại chú ý rằng các tứ giác $ATHM$ và $ITDM$ là các tứ giác nội tiếp, ta được

$$\widehat{DTH} = \widehat{AHT} - \widehat{IDT} = \widehat{AMT} - \widehat{IMT} = \widehat{AMI} = \widehat{OAM} = \widehat{DAK}.$$

Do đó, $\widehat{DAP} = \widehat{DAK}$, từ đó suy ra A, P, K thẳng hàng.

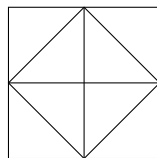
□

Câu 5: (1 điểm)

Cho 2023 điểm nằm trong một hình vuông cạnh 1. Một tam giác đều được gọi là phủ điểm M nếu điểm M nằm trong tam giác hoặc nằm trên cạnh của tam giác.

- 1) Chứng minh tồn tại tam giác đều cạnh $\frac{1}{\sqrt{2}}$ phủ ít nhất 253 điểm trong 2023 điểm đã cho.
- 2) Chứng minh tồn tại tam giác đều cạnh $\frac{11}{12}$ phủ ít nhất 506 điểm trong 2023 điểm đã cho.

Lời giải. 1) Chia hình vuông thành 8 phần như sau



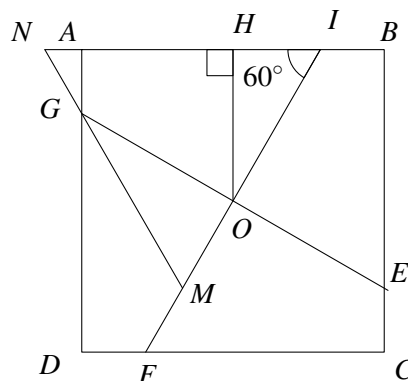
Mỗi một phần đều là tam giác vuông cân với độ dài cạnh bên bằng $\frac{1}{2}$.

Theo nguyên lý Dirichlet, có 2023 điểm được phân bố vào trong 8 phần như hình vẽ trên nên tồn tại một phần có chứa ít nhất

$$\left\lfloor \frac{2023}{8} \right\rfloor + 1 = 253 \text{ điểm.}$$

Nói cách khác, tồn tại một tam giác vuông cân có cạnh bằng $\frac{1}{2}$ chứa ít nhất 253 điểm. Mà tam giác vuông cân có cạnh bên bằng $\frac{1}{2}$ thì sẽ chứa trong một tam giác đều có cạnh bằng $\frac{1}{\sqrt{2}}$, ta có điều phải chứng minh.

- 2) Gọi hình vuông được cho là $ABCD$ với tâm O . Ta sử dụng hai đường vuông góc IF, EG đi qua O và tạo với các cạnh một góc 60° để chia hình vuông thành 4 tứ giác $AIOG, BIOE, CEOF, DFOG$ như hình vẽ.



Theo nguyên lý Dirichlet, có 2023 điểm được phân bố vào trong 4 phần như hình vẽ trên nên tồn tại một phần phủ ít nhất

$$\left\lfloor \frac{2023}{4} \right\rfloor + 1 = 506 \text{ điểm.}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử tứ giác $AIOG$ phủ ít nhất 506 điểm. Ta dựng tam giác đều IMN sao cho $A \in IN, O \in IM$ và $G \in MN$ như hình vẽ. Kẻ $OH \perp AB$. Ta có $OI = \frac{OH}{\sin 60^\circ} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Tương tự $OG = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Ta lại có $OM = \frac{OG}{\tan 60^\circ} = \frac{1/\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$. Suy ra

$$IM = OI + OM = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} < \frac{11}{12}.$$

Như vậy tam giác đều IMN có cạnh nhỏ hơn $\frac{11}{12}$, suy ra tồn tại tam giác đều phủ toàn bộ tam giác đều IMN . Tam giác đều ấy do đó phủ toàn bộ tứ giác $AIOG$, suy ra nó cũng phủ ít nhất 506 điểm được cho.

□

Câu I (2,0 điểm)

1) Giải phương trình $2x + 2 = (5 - x)\sqrt{3x - 2}$.

2) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y + 3xy = 9 \\ x^3 + y^3 = 9 \end{cases}$$
.

Câu II (2,0 điểm)

1) Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh số $A = 2^{p^2+2} - 8$ chia hết cho 21.

2) Tìm tất cả các số nguyên x và y thỏa mãn $x^3 - y^3 = 2(x - y)^2 + 17$.

Câu III (2,0 điểm)

1) Cho đa thức $f(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2022x + 2023$. Chứng minh đa thức $f(x)$ không có nghiệm hữu tỉ.

2) Với các số thực a, b và c thỏa mãn $(a+1)(b+1)(c+1) = (a-1)(b-1)(c-1)$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = |a| + |b| + |c|$.

Câu IV (3,0 điểm)

Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B ($R < R' < OO'$). Gọi PQ là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O) và (O') với $P \in (O)$ và $Q \in (O')$. Đường thẳng PQ cắt đường thẳng OO' tại điểm S . Qua điểm S vẽ một đường thẳng cắt đường tròn (O) tại hai điểm E, F và cắt đường tròn (O') tại hai điểm G, H sao cho $SE < SF < SG < SH$.

1) Chứng minh đường thẳng OE song song với đường thẳng $O'G$.

2) Chứng minh $SA^2 = SP \cdot SQ$.

3) Tiếp tuyến tại điểm A của đường tròn (O) cắt đường thẳng OO' tại điểm M . Tiếp tuyến tại điểm A của đường tròn (O') cắt đường thẳng OO' tại điểm N . Đường thẳng ME cắt đoạn thẳng AB tại điểm I . Chứng minh $\frac{EA^2}{EB^2} = \frac{IA}{IB}$ và ba điểm N, I, H là ba điểm thẳng hàng.

Câu V (1,0 điểm)

Trên bàn có hai túi kẹo: túi thứ nhất có 18 viên kẹo, túi thứ hai có 21 viên kẹo. An và Bình cùng chơi một trò chơi như sau: mỗi lượt chơi, một bạn sẽ lấy đi 1 viên kẹo từ một túi bất kỳ hoặc là mỗi túi lấy đi 1 viên kẹo. Hai bạn luân phiên thực hiện lượt chơi của mình. Người đầu tiên không thể thực hiện được lượt chơi của mình là người thua cuộc, người còn lại là người thắng cuộc. Nếu An là người lấy kẹo trước, hãy chỉ ra chiến thuật chơi của An để An là người thắng cuộc.

-----HẾT-----

2. PHẦN LỜI GIẢI

Câu 1: (2,0 điểm)

1) Giải phương trình

$$2x + 2 = (5 - x)\sqrt{3x - 2}.$$

2) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y + 3xy = 9 \\ x^3 + y^3 = 9 \end{cases}$$

Lời giải.

1) Điều kiện xác định $x \geq \frac{2}{3}$. Phương trình ban đầu tương đương với

$$3x - 2 - x + 5 - (5 - x)\sqrt{3x - 2} - 1 = 0.$$

Đặt $\sqrt{3x - 2} = a, 5 - x = b$. Phương trình trở thành

$$a^2 + b - ab - 1 = 0 \Leftrightarrow (a - 1)(a + 1 - b) = 0.$$

Từ đó ta có $a = 1$ hoặc $a = b - 1$.

- Với $a = 1$ thì $x = 1$.

- Với $a = b - 1$ thì

$$\sqrt{3x - 2} = 4 - x.$$

Bình phương hai vế với điều kiện $x \leq 4$ ta có

$$3x - 2 = x^2 - 8x + 16 \Leftrightarrow x^2 - 11x + 18 = 0.$$

Giải phương trình trên ta được $x = 2$ và $x = 9$. Kết hợp điều kiện ta còn $x = 2$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 1$ và $x = 2$.

2) Đặt $x + y = a, xy = b$. Hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} a + 3b = 9 \\ a^3 - 3ab = 9 \end{cases}$$

Từ phương trình $a + 3b = 9$ ta có $3b = 9 - a$, thay vào phương trình còn lại, ta được:

$$a^3 - a(9 - a) = 9 \Leftrightarrow (a + 1)(a - 3)(a + 3) = 0.$$

Giải phương trình trên ta có $a = 3, a = -1$ và $a = -3$.

- Với $a = 3$ thì $b = 2$, ta có $x = 1, y = 2$ và $x = 2, y = 1$.

- Với $a = -1$ thì $b = \frac{10}{3}$, ta không có x, y thỏa mãn.

- Với $a = -3$ thì $b = 4$, ta không có x, y thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình đã cho có đúng hai nghiệm $(x; y)$ là $(1; 2), (2; 1)$.

□

Câu 2: (2,0 điểm)

- 1) Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh số $A = 2^{p^2+2} - 8$ chia hết cho 21.
- 2) Tìm tất cả các số nguyên x và y thỏa mãn $x^3 - y^3 = 2(x - y)^2 + 17$.

Lời giải.

- 1) Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ và p không chia hết cho 3.

Do đó $p^2 + 2 = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$, kéo theo $2^{p^2+2} = 2 \cdot 4^k \equiv 2 \cdot 1 \equiv 2 \pmod{3}$. Suy ra $A = 2^{p^2+2} - 8$ chia hết cho 3.

Do p không chia hết cho 3 nên $p^2 + 2 \equiv 1 + 2 \equiv 0 \pmod{3}$. Đặt $p^2 + 2 = 3h$ với $h \in \mathbb{N}^*$. Khi đó, ta có

$$A = 2^{p^2+2} - 8 = 2^{3h} - 8 = 8^h - 8 \equiv 1 - 1 = 0 \pmod{7}.$$

Từ đây ta suy ra A chia hết cho 3 và 7 mà $(3, 7) = 1$ nên A chia hết cho $3 \cdot 7 = 21$.

Phép chứng minh hoàn tất.

- 2) Đặt $d = x - y$ thì $x = y + d$. Chú ý là d phải lớn hơn 0 nên $x > y$ kéo theo d là số nguyên dương. Thay vào phương trình, ta được

$$(y + d)^3 - y^3 = 2d^2 + 17.$$

Khai triển và chuyển về thì

$$(3y^2 + 3dy + d^2 - 2d)d = 17.$$

Từ phương trình trên suy ra $d \mid 17$ vì d nguyên dương suy ra $d \in \{1, 17\}$.

- Nếu $d = 1$ thì $y(y + 1) = 6$ và tìm được $y = 2, x = 3$ và $y = -3, x = -2$.
- Nếu $d = 17$ thì $3y^2 + 51y = -254$ không có nghiệm nguyên do vế trái chia hết cho 3, trong khi đó vế phải thì không.

Vậy, có duy nhất một cặp (x, y) thỏa mãn là $(3, 2), (-2, -3)$.

Nhận xét. Thực tế thì có thể chuyển $2(x - y)^2$ rồi rút thừa số chung $x - y$.

□

Câu 3: (2,0 điểm)

- 1) Cho đa thức $f(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2022x + 2023$. Chứng minh đa thức $f(x)$ không có nghiệm hữu tỉ.
- 2) Với các số thực a, b và c thỏa mãn $(a+1)(b+1)(c+1) = (a-1)(b-1)(c-1)$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = |a| + |b| + |c|$.

Lời giải.

- 1) Giả sử $f(x)$ có nghiệm α hữu tỉ. Viết $\alpha = \frac{p}{q}$ với $p, q \in \mathbb{Z}, q > 0$ và $(p, q) = 1$.
 Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} f(\alpha) = 0 &\Leftrightarrow \alpha^4 + 2\alpha^3 + 3\alpha^2 + 2022\alpha + 2023 = 0 \\ &\Leftrightarrow p^4 + 2p^3q + 3p^2q^2 + 2022pq^3 + 2023q^4 = 0. \end{aligned}$$

Từ đây do $q \mid 0$ ta được $q \mid p^4$ vì $(p^4, q) = (p, q) = 1$ nên $q = 1$. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} 0 &= p^4 + 2p^3 + 3p^2 + 2022p + 2023 \\ &= p^2(p^2 + 1) + 2p^3 + 2p^2 + 2022p + 2023. \end{aligned}$$

Phương trình này vô nghiệm vì vế trái là số lẻ trong khi vế phải là số chẵn. Do đó đa thức $f(x)$ không có nghiệm hữu tỉ. Phép chứng minh hoàn tất.

- 2) Từ giả thiết ta suy ra $ab + bc + ac = -1$, có $A = |a| + |b| + |c| \geq 0$, xét

$$A^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2|ab| + 2|bc| + 2|ac|.$$

Theo bất đẳng thức giá trị tuyệt đối, ta có

$$A^2 = (a + b + c)^2 + 2(|ab| + |bc| + |ac|) + 2 \geq 0 + 2|ab + bc + ac| + 2 = 4.$$

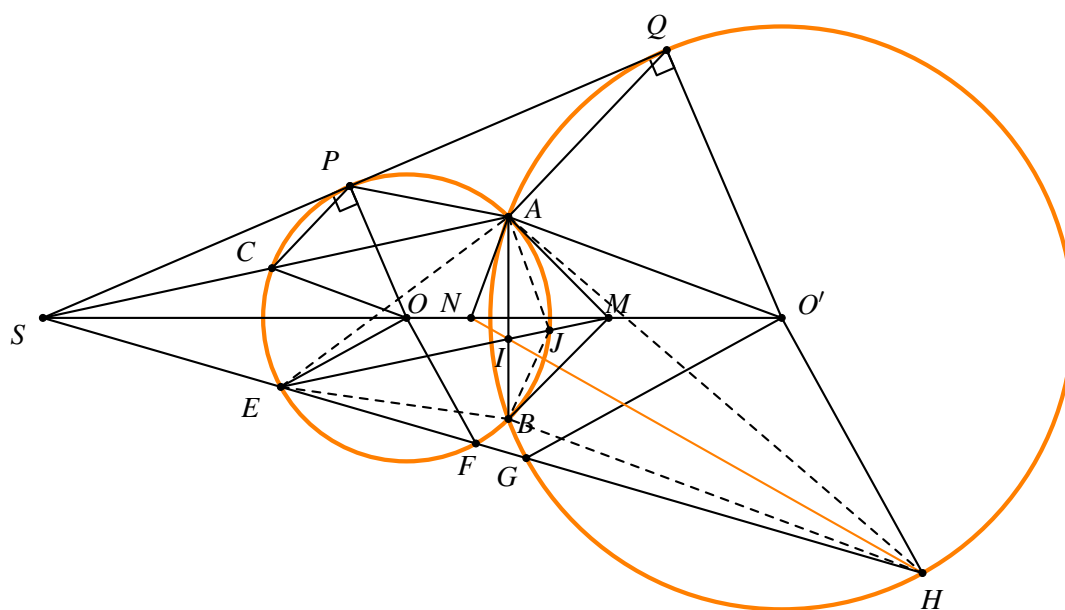
Từ đây kết hợp $A \geq 0$ suy ra $A \geq 2$, dấu bằng xảy ra chẳng hạn $a = 0, b = -1, c = 1$.
 Vậy giá trị nhỏ nhất của $A = 2$.

□

Câu 4: (3,0 điểm)

Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B ($R < R' < OO'$). Gọi PQ là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O) và (O') với $P \in (O)$ và $Q \in (O')$. Đường thẳng PQ cắt đường thẳng OO' tại điểm S . Qua điểm S vẽ một đường thẳng cắt đường tròn (O) tại hai điểm E, F và cắt đường tròn (O') tại hai điểm G, H sao cho $SE < SF < SG < SH$.

- 1) Chứng minh đường thẳng OE song song với đường thẳng $O'G$.
- 2) Chứng minh $SA^2 = SP \cdot SQ$.
- 3) Tiếp tuyến tại điểm A của đường tròn (O) cắt đường thẳng OO' tại điểm M . Tiếp tuyến tại điểm A của đường tròn (O') cắt đường thẳng OO' tại điểm N . Đường thẳng ME cắt đoạn thẳng AB tại điểm I . Chứng minh $\frac{EA^2}{EB^2} = \frac{IA}{IB}$ và ba điểm N, I, H là ba điểm thẳng hàng.



Lời giải.

- 1) Trên đường thẳng $\overline{S, E, F}$ lấy các điểm G', H' sao cho $O'G' \parallel OE$ và $O'H' \parallel OF$. Theo định lý Thales, ta được $\frac{SE}{SG'} = \frac{OE}{O'G'} = \frac{SO}{SO'} = \frac{SF}{SH'} = \frac{OF}{O'H'}$. Mặt khác, ta cũng có $\frac{SO}{SO'} = \frac{OP}{O'Q} = \frac{R}{R'}$. Như vậy,

$$\frac{OE}{O'G'} = \frac{OF}{O'H'} = \frac{R}{R'}.$$

Kết hợp với $OE = OF = R$ (vì $E, F \in (O)$), ta thu được $O'G' = O'H' = R'$ và vì thế $G', H' \in (O')$ hay $\overline{S, E, F} \cap (O') = \{G', H'\}$. Mặt khác, từ $\frac{SE}{SG'} = \frac{SF}{SH'}$ và $SE < SF$ ta suy ra $SG' < SH'$. Do đó, ta được $G' \equiv G, H' \equiv H$ và vì thế $OE \parallel O'G, OF \parallel O'H$.

- 2) Trên đường thẳng SA lấy điểm C sao cho $OC \parallel O'A$. Khi đó, ta có $\frac{OC}{O'A} = \frac{SO}{SO'} = \frac{R}{R'}$. Kết hợp với $O'A = R'$ (vì $A \in (O')$) nên $OC = R$ và vì thế $C \in (O)$. Hơn nữa, ta cũng có $\frac{SC}{SA} = \frac{SO}{SO'} = \frac{SP}{SQ}$,

vì thế $CP \parallel AQ$. Do đó, $\widehat{SQA} = \widehat{SPC} = \widehat{SAP}$. Từ đó $\triangle SAP \sim \triangle SQA$ (g.g). Do đó, $\frac{SP}{SA} = \frac{SA}{SQ}$. và $SA^2 = SP \cdot SQ$.

- 3) Gọi $ME \cap (O) = \{J, E\}$. Từ tính đối xứng nên ta cũng có MB là một tiếp tuyến của (O) . Khi đó, ta có $\triangle MJA \sim \triangle MAE$ (g.g) và $\triangle MJB \sim \triangle MBE$ (g.g) nên ta được

$$\frac{JA}{EA} = \frac{MJ}{MA} = \frac{MJ}{MB} = \frac{JB}{EB}.$$

Từ đó ta thu được $\frac{EB}{EA} = \frac{JB}{JA}$. Từ đó để ý rằng $\triangle IAE \sim \triangle IJB$ và $\triangle IBE \sim \triangle IJA$ nên ta được

$$\frac{IA}{IB} = \frac{IA}{IE} \cdot \frac{IE}{IB} = \frac{JA}{EB} \cdot \frac{EA}{JB} = \frac{EA}{EB} \cdot \frac{JA}{JB} = \frac{EA^2}{EB^2}.$$

Bây giờ ta sẽ chứng minh $\frac{EA}{EB} = \frac{HA}{HB}$. Thật vậy, ta có $SP^2 = SE \cdot SF$ và $SQ^2 = SG \cdot SH$. Do đó, $SB^4 = SA^4 = SP^2 \cdot SQ^2 = SE \cdot SF \cdot SG \cdot SH$. Mặt khác, từ câu a ta có $\frac{SE}{SF} = \frac{SG}{SH}$ hay $SE \cdot SH = SG \cdot SF$. Như vậy, ta được $SA^4 = SB^4 = (SE \cdot SH)^2$ hay $SA^2 = SB^2 = SE \cdot SH$. Từ đó ta thu được $\triangle SEA \sim \triangle SAH$ (c.g.c) và $\triangle SEB$ và $\triangle SBH$ (c.g.c). Do vậy,

$$\frac{EA}{HA} = \frac{SE}{SA} = \frac{SE}{SB} = \frac{EB}{HB}.$$

Nói cách khác, ta thu được $\frac{EA}{EB} = \frac{HA}{HB}$. Đến đây, đặt $HN \cap AB = I'$. Chứng minh tương tự như ý trên ta cũng thu được $\frac{I'A}{I'B} = \frac{HA^2}{HB^2}$. Từ đó suy ra $\frac{IA}{IB} = \frac{I'A}{I'B}$ và dẫn đến $I \equiv I'$. Như vậy, N, I, H thẳng hàng.

□

Câu 5: (1 điểm)

Trên bàn có hai túi kẹo: túi thứ nhất có 18 viên kẹo, túi thứ hai có 21 viên kẹo. An và Bình cùng chơi một trò chơi như sau: mỗi lượt chơi, một bạn sẽ lấy đi 1 viên kẹo từ một túi bất kỳ hoặc là mỗi túi lấy đi 1 viên kẹo. Hai bạn luân phiên thực hiện lượt chơi của mình. Người đầu tiên không thể thực hiện được lượt chơi của mình là người thua cuộc, người còn lại là người thắng cuộc. Nếu An là người lấy kẹo trước, hãy chỉ ra chiến thuật chơi của An để An là người thắng cuộc.

Lời giải. Đầu tiên An sẽ bốc 1 viên từ túi thứ hai, hai túi lúc này lần lượt có 18 và 20 viên kẹo. Tại lượt tiếp theo, chiến thuật của An sẽ là nếu Bình bốc như thế nào thì An sẽ bốc y hệt như vậy. Khi đó ta thấy Bình sẽ phải bắt đầu bốc với hai túi đều có số chẵn viên kẹo, mà Bình thì dù bốc thế nào cũng sẽ khiến cho túi mà Bình bốc còn lại một số lẻ các viên kẹo, hay nói riêng, là còn kẹo. Như vậy khi đến lượt An thì An hoàn toàn có thể sao chép cách bốc của Bình, do cứ túi nào mà Bình bốc thì phải còn kẹo. Hơn nữa sau khi An bốc thì bất cứ túi nào có số lẻ viên kẹo sẽ quay về còn lại số chẵn viên kẹo. Khi đó đến lượt Bình thì Bình lại phải bốc với hai túi còn số chẵn viên kẹo, và An vẫn có thể lặp lại chiến thuật như trên. Trong quá trình bốc này, ta thấy An luôn có thể bốc kẹo, cho nên An không thể là người thua cuộc, nói cách khác, An sẽ là người thắng cuộc với chiến thuật này. □