



A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ:

I. ĐẠI SỐ:

1. Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn.

- + Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế, phương pháp cộng đại số.
- + Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình.

2. Hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$:

- + Tính chất, đồ thị của hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$.
- + Phương trình bậc hai một ẩn và công thức nghiệm, công thức nghiệm thu gọn của phương trình bậc hai.
- + Hệ thức Vi-et và ứng dụng.

II. HÌNH HỌC

1. Góc với đường tròn:

- + Góc ở tâm.
- + Góc nội tiếp.
- + Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung
- + Góc có đỉnh bên trong, bên ngoài đường tròn.
- + Cung chứa góc

2. Tứ giác nội tiếp:

- + Định nghĩa, tính chất của tứ giác nội tiếp.
- + Các dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp.

3. Công thức tính độ dài đường tròn, độ dài cung tròn, diện tích hình tròn, hình quạt tròn.

4. Hình học không gian: hình trụ, hình nón, hình cầu.

B. BÀI TẬP THAM KHẢO:

I. PHẦN ĐẠI SỐ:

Dạng 1. Rút gọn biểu thức và các câu hỏi liên quan:

Bài 1. Cho hai biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ và $Q = \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}} - \frac{4}{\sqrt{x}}$ với $x > 0; x \neq 1$

a) Tính giá trị của biểu thức P khi $x = 16$.

b) Rút gọn biểu thức $A = P.Q$.

c) So sánh A và $|A|$.

Bài 2. Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}$ và $B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}+2}{2-\sqrt{x}} - \frac{9\sqrt{x}+2}{4-x}$ với

$x \geq 0; x \neq 1; x \neq 4$.

a) Tìm x để $A = \frac{5}{6}$.

b) Chứng minh rằng: $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}$.

c) Tìm các giá trị nguyên của x để $P = A.B$ nhận giá trị là một số tự nhiên.

Bài 3. Cho hai biểu thức:

$$M = 1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \text{ và } N = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6} \text{ với } x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9.$$

a) Tính giá trị của biểu thức M khi $x = 9$

b) Chứng minh rằng: $N = \frac{1}{\sqrt{x}-2}$. Tìm x để $N > 0$.

c) Cho $P = M : N$. Tìm các giá trị của x thỏa mãn $2P = 2\sqrt{x} - 9$.

Bài 4. Cho hai biểu thức:

$$P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+8}{x-4} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{2} \text{ và } Q = \frac{x+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} \text{ với } x \geq 0; x \neq 4.$$

- a) Rút gọn biểu thức P .
 b) So sánh P với 3.
 c) Tìm các giá trị của x để P nhận giá trị nguyên.
 d) Cho $M = P + Q$. Tìm giá trị nhỏ nhất của M .

Bài 5. Cho hai biểu thức:

$$A = \frac{x}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \text{ và } B = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} \text{ với } x \geq 0, x \neq 4$$

- a) Tính giá trị của B khi $x = 36$.
 b) Chứng minh $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$.
 c) Tìm số tự nhiên x để $P = B \cdot (A-1)$ đạt giá trị lớn nhất.

Dạng 2. Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Bài 1. Một xe ô tô và một xe máy cùng khởi hành từ A để đi đến B với vận tốc của mỗi xe không đổi trên toàn bộ quãng đường AB dài 120km. Do vận tốc của xe ô tô lớn hơn vận tốc của xe máy là 10km/h nên xe ô tô đến B sớm hơn xe máy 36 phút. Tính vận tốc của mỗi xe?

Bài 2. Một tàu tuần tra chạy ngược dòng 60km. Sau đó chạy xuôi dòng 48km trên cùng một dòng sông có vận tốc của dòng nước là 2 km/h. Tính vận tốc của tàu tuần tra khi nước yên lặng, biết thời gian xuôi dòng ít hơn thời gian ngược dòng 1 giờ.

Bài 3. Một tam giác vuông có cạnh huyền bằng 5cm và diện tích bằng 6cm². Tính độ dài các cạnh góc vuông của tam giác vuông đó.

Bài 4. Hai người cùng làm chung một công việc trong $\frac{12}{5}$ giờ thì xong. Nếu mỗi người làm một mình thì thời gian để người thứ nhất hoàn thành công việc ít hơn người thứ hai là 2 giờ. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người phải làm trong bao lâu để xong công việc.

Bài 5. Để hoàn thành một công việc theo dự định thì cần một số công nhân làm trong một số ngày nhất định. Nếu tăng thêm 10 công nhân thì công việc hoàn thành sớm được 2 ngày. Nếu bớt đi 10 công nhân thì phải mất thêm 3 ngày nữa mới hoàn thành công việc. Hỏi theo dự định thì cần bao nhiêu công nhân và làm trong bao nhiêu ngày?

Bài 6. Một tổ theo kế hoạch mỗi ngày phải sản xuất 40 sản phẩm. Khi thực hiện, do cải tiến năng suất nên mỗi ngày sản xuất được 45 sản phẩm. Do đó, tổ không những hoàn thành trước kế hoạch 2 ngày mà còn vượt mức 5 sản phẩm. Hỏi theo kế hoạch, tổ phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm?

Bài 7. Một phòng họp có 300 ghế ngồi, được xếp thành một số hàng có số ghế bằng nhau. Buổi họp hôm đó có 378 người đến dự nên ban tổ chức đã kê thêm 3 hàng ghế và mỗi hàng ghế phải xếp thêm 1 ghế mới đủ chỗ ngồi. Hỏi lúc đầu phòng họp có bao nhiêu hàng ghế biết rằng số hàng ghế lúc đầu không vượt quá 20 hàng.

Dạng 3. Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn:

Giải các hệ phương trình sau:

$$a) \begin{cases} x + 3y = 4 \\ 3x - 4y = -1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3(x-2) - \frac{2}{y+3} = 4 \\ 2(x-2) + \frac{1}{y+3} = 5 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 3\sqrt{x-1} + 2\sqrt{y} = 13 \\ 2\sqrt{x-1} - \sqrt{y} = 4 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 2|x+1| - 5y = 3 \\ |x+1| + 2y = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

Dạng 4. Hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) và phương trình bậc hai một ẩn.**Bài 1.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P): $y = 2x^2$.

- Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $A(0; -2)$ và tiếp xúc với (P).
- Cho đường thẳng (d): $y = 2x + 4$. Vẽ (P) và (d) trên cùng hệ trục tọa độ
- Chứng minh (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B. Tính diện tích tam giác OAB.

Bài 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng (d): $y = 2mx - m^2 + 1$ và parabol (P): $y = x^2$ (m là tham số).

- Tìm tọa độ giao điểm của (d) và (P) khi $m = 2$.
- Tìm tất cả giá trị m để đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1, y_1)$; $B(x_2, y_2)$ thỏa mãn $y_1 - y_2 > 4$.

Bài 3. Cho Parabol (P) $y = -x^2$ và đường thẳng có phương trình (d): $y = 2x + m$ (m là tham số)

- Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt nằm về bên trái của trục tung.
- Tìm các giá trị của m để đường thẳng (d) cắt Parabol (P) tại hai điểm nằm về hai phía của trục tung.

Bài 4. Cho phương trình: $x^2 - 6x + 2m + 1 = 0$ (m là tham số).

- Tìm m để phương trình có một nghiệm bằng -3. Khi đó hãy tìm nghiệm còn lại.
- Tìm m để phương trình có hai nghiệm dương phân biệt.
- Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu trong đó nghiệm âm có giá trị tuyệt đối bé hơn.
- Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $2x_1 - x_2 = 15$
- Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1(x_2 + 1) + x_2(x_1 + 1) = 18$.

Bài 5. Cho phương trình $x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0$ (với m là tham số)

- Chứng minh phương trình luôn có nghiệm với mọi giá trị của m .
- Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 5$.
- Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 = x_2 - 4$.

Bài 6. Cho phương trình: $x^2 - 2(m-1)x - 3 - m = 0$ (x là ẩn số)

- Chứng tỏ rằng phương trình có nghiệm x_1, x_2 với mọi m .
- Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $\frac{4}{x_1} + \frac{4}{x_2} = -\frac{2}{3}$.
- Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2 - x_1 - x_2$.
- Tìm hệ thức giữa hai nghiệm không phụ thuộc tham số m .

Dạng 5. Một số bài tập nâng cao:**Bài 1.** Với hai số thực không âm a, b thỏa mãn $a^2 + b^2 = 4$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M = \frac{ab}{a+b+2}.$$

*(Trích đề tuyển sinh lớp 10 Hà Nội năm 2015 - 2016)***Bài 2.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} + 2\sqrt{x}$.*(Trích đề tuyển sinh lớp 10 Hà Nội năm 2018 - 2019)***Bài 3.** Cho biểu thức $P = a^4 + b^4 - ab$, với a, b là hai số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 + ab = 3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức P .*(Trích đề tuyển sinh lớp 10 Hà Nội năm 2019 - 2020)*

Bài 4. Với hai số thực a, b thỏa mãn $a^2 + b^2 = 2$, tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức: a) $P = 3(a + b) + ab$. b) $P = \sqrt{a + 1} + \sqrt{b + 1}$.

Bài 5. Cho số thực $x > 0$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + \sqrt{x^2 + \frac{1}{x}}$.

II. PHẦN HÌNH HỌC:

Bài 1. Cho đường tròn $(O; R)$ và dây AB cố định nhỏ hơn $2R$. Gọi K là điểm chính giữa cung nhỏ AB . Kẻ đường kính IK cắt AB tại N . Lấy điểm M bất kì trên cung lớn AB (M khác điểm A và B), MK cắt AB tại D . Hai đường thẳng IM và AB cắt nhau tại C .

- Chứng minh: tứ giác $MNKC$ là tứ giác nội tiếp.
- Chứng minh: $IM \cdot IC = IN \cdot IK$.
- Gọi ID và CK cắt nhau tại E . Chứng minh E thuộc đường tròn $(O; R)$ và NC là tia phân giác của $\angle MNE$.
- Khi M di chuyển trên cung lớn AB (M khác điểm A và B). Chứng minh đường thẳng ME luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 2. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp $(O; R)$ đường kính AD . Gọi E là giao điểm của AC và BD . Kẻ EF vuông góc với AD tại F .

- Chứng minh tứ giác $ABEF$ nội tiếp được đường tròn.
- Chứng minh CA là tia phân giác của $\angle BCF$.
- Đường tròn ngoại tiếp tam giác BCF cắt BD ở M . Chứng minh $OM \parallel AC$.

Bài 3. Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A cố định nằm ngoài đường tròn. Từ A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC đến $(O; R)$ (B và C là các tiếp điểm). Qua A kẻ cát tuyến AMN ($AM < AN$, B và O nằm cùng phía với cát tuyến AMN). Gọi H là trung điểm của MN .

- Chứng minh: $AB^2 = AM \cdot AN$.
- Chứng minh tứ giác $ABOC$ và $ACHO$ là các tứ giác nội tiếp.
- Qua H kẻ đường thẳng song song với BN cắt BC tại E . Chứng minh rằng $ME \parallel AB$.
- Chứng minh khi cát tuyến AMN thay đổi thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MHE thuộc một đường tròn cố định.

Bài 4. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Kẻ đường kính AG của đường tròn (O) . Gọi I là trung điểm BC .

- Chứng minh $BFEC$ và $AFHE$ là các tứ giác nội tiếp.
- Chứng minh $AE \cdot AC = AF \cdot AB$ và tứ giác $BHCG$ là hình bình hành.
- Cho BC cố định, điểm A chuyển động trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC nhọn. Tìm vị trí của A để diện tích tam giác AEH lớn nhất.

Bài 5. Cho đường tròn $(O; R)$ và dây BC cố định không qua O . Trên tia đối của tia BC lấy điểm A khác B . Từ A kẻ các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (M, N là tiếp điểm).

- Chứng minh bốn điểm A, M, O, N cùng thuộc một đường tròn.
- MN cắt OA tại H . Chứng minh $OA \perp MN$ và $AHAO = AB \cdot AC$.
- Chứng minh khi A thay đổi trên tia đối của tia BC , đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 6. Cho nửa đường tròn $(O; R)$, đường kính AB . Trên tia tiếp tuyến kẻ từ A của nửa đường tròn này lấy điểm C sao cho $AC > R$. Từ C kẻ tiếp tuyến thứ hai CD của nửa đường tròn $(O; R)$, với D là tiếp điểm. Gọi H là giao điểm của AD và OC .

- a) Chứng minh: $ACDO$ là tứ giác nội tiếp.
b) Đường thẳng BC cắt đường tròn $(O;R)$ tại điểm thứ hai là M . Chứng minh:
 $CD^2 = CM.CB$.
c) Gọi K là giao điểm của AD và BC . Chứng minh: $\angle MHC = \angle CBO$ và $\frac{CM}{CB} = \frac{KM}{KB}$

Bài 7. Cho (O) và dây AB cố định không đi qua O . Đường kính CD vuông góc với AB tại H (C thuộc cung AB lớn). Điểm M di chuyển trên cung AC nhỏ ($M \neq A, M \neq C$). Đường thẳng CM cắt AB tại N , MD cắt AB tại E .

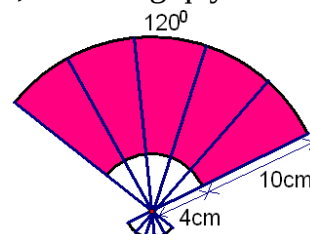
- a) Chứng minh tứ giác $CMEH$ nội tiếp.
b) Chứng minh $NM.NC = NA.NB$.
c) Kẻ đường kính AP của (O) . Gọi I là trung điểm của MC . Kẻ IK vuông góc với đường thẳng AM tại K . Chứng minh $IK \parallel MP$ và K thuộc một đường tròn cố định khi M di chuyển trên cung nhỏ AC .

Bài 8. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB . Lấy điểm M bất kì trên nửa đường tròn. Tiếp tuyến tại M cắt tiếp tuyến Ax và By của nửa đường tròn lần lượt tại C và D . Tia AM cắt CO và By lần lượt tại E và G .

- a) Chứng minh tứ giác $BOEG$ nội tiếp.
b) Chứng minh: $AC.BG = 2R^2$.
c) BC cắt OG tại K . Chứng minh rằng: D là trung điểm của BG và OM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác MKG .
d) Biết MB cắt OD tại F . Chứng minh ba đường thẳng EF, BC, AD đồng quy.

Bài 9. Một chiếc quạt có các kích thước như hình vẽ.

- a) Quạt mở được tối đa một cung có độ dài là bao nhiêu?
b) Hãy tính diện tích phần giấy dùng làm quạt, biết chiếc quạt được làm 2 mặt giấy (lấy $\pi \approx 3,14$, kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



Bài 10. Dùng một mảnh vải hình tròn để phủ lên một chiếc bàn hình tròn có diện tích $1849\pi \text{ cm}^2$, sao cho khăn rủ xuống khỏi mép bàn 20cm (không tính phần viền mép khăn). Tính diện tích phần khăn rủ xuống khỏi mép bàn. (lấy $\pi \approx 3,14$, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).



Bài 11. Một tàu đánh cá khi ra khơi cần mang theo 50 thùng dầu, mỗi thùng dầu coi là hình trụ có chiều cao là 90cm , đường kính đáy thùng là 60cm . Hãy tính xem lượng dầu mà tàu phải mang theo khi ra khơi là bao nhiêu lít (lấy $\pi \approx 3,14$, kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Bài 12. Một cốc thủy tinh có dạng hình trụ đang chứa một lượng nước. Bán kính đáy của cốc nước hình trụ đó là 3cm . Người ta thả 1 viên bi hình cầu (không thấm nước) vào cốc, viên bi chìm xuống đáy cốc và làm cho cột nước dâng cao thêm 4cm và nước chưa tràn ra ngoài. Tính bán kính của viên bi.

Bài 13. Một hộp sữa hình trụ có đường kính đáy là 12cm , chiều cao 10cm . Nhà sản xuất phủ kín mặt xung quanh của hộp sữa bằng giấy in các thông tin của sản phẩm. Hãy tính diện tích phần giấy in các thông tin của sản phẩm đó (lấy $\pi \approx 3,14$, làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Bài 14. Một dụng cụ làm bằng thủy tinh dùng để chứa dung dịch có dạng hình nón với độ dài đường sinh là 15cm và diện tích xung quanh là 270cm^2 . Hãy tính thể tích của dụng cụ đó (bỏ qua bề dày của dụng cụ, lấy $\pi \approx 3,14$, làm tròn kết quả đến hàng chữ số thập phân thứ nhất).

Bài 15. Một bể cá mini hình cầu có đường kính 18cm . Ban đầu bể chưa có gì. Sau đó người ta đổ vào bể 6 cốc nước, mỗi cốc chứa 350ml nước. Hỏi lượng nước chiếm bao nhiêu phần trăm thể tích bể? (lấy $\pi \approx 3,14$, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Bài 16. Một cái trục lăn sơn có hình trụ, bán kính của đường tròn đáy là 5cm , chiều cao là 23cm . Sau khi lăn được trọn vẹn được 10 vòng thì trục lăn tạo trên tường diện tích bằng bao nhiêu. (lấy $\pi \approx 3,14$, làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



III. ĐỀ TỰ LUYỆN : Đề kiểm tra học kì II Quận Ba Đình năm học 2020-2021

Thời gian làm bài: 90 phút

Bài I. (3,0 điểm)

1) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{1}{x+3} - \frac{2}{y-1} = 9 \\ \frac{3}{x+3} + \frac{1}{y-1} = 6 \end{cases}$$

2) Cho phương trình: $x^4 - 2mx^2 + (m^2 - 1) = 0$ (m là tham số) (1)

a) Giải phương trình (1) khi $m = 3$.

b) Tìm m để phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt.

Bài II. (3,0 điểm).

1) Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình

Một ca nô đi xuôi dòng từ A đến B cách nhau 40km sau đó ngược dòng từ B về A. Cho biết thời gian đi xuôi dòng ít hơn thời gian đi ngược dòng là 20 phút, vận tốc dòng nước là 3km/h và vận tốc riêng của cano không đổi. Tính vận tốc riêng của ca nô.

2) Người ta trải một chiếc khăn hình tròn có bán kính 1m trên một mặt bàn có hình tròn bán kính 60cm . Tính diện tích phần khăn rủ xuống (làm tròn đến chữ số hàng đơn vị).

Bài III. (3,5 điểm) Cho $(O;R)$ và điểm A cố định nằm ngoài đường tròn (O). Qua A kẻ đường thẳng d cắt (O) tại H, K ($AH < AK$). Gọi I là trung điểm của HK. Kẻ tiếp tuyến AB, AC tới (O), (B, C là hai tiếp điểm và B thuộc cung lớn HK).

1) Chứng minh tứ giác ABOI nội tiếp.

2) Gọi G là giao điểm của OA và BC. Chứng minh $AC^2 = AH \cdot AK$ và $\angle AKO = \angle AGH$.

3) Hai tiếp tuyến tại H, K của đường tròn (O) cắt nhau tại S. Chứng minh: GC là tia phân giác của góc HGK và ba điểm B, C, S thẳng hàng.

Bài IV. (0,5 điểm). Cho các số thực x, y thỏa mãn điều kiện: $\sqrt{x+2} - y^3 = \sqrt{y+2} - x^3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^2 + 2xy - 2y^2 + 2y + 2021$.

-----Hết-----