

(Đề thi gồm có 01 trang)

Bài 1. (2,0 điểm)

1. Cho hai số a, b thỏa mãn $a + b = 9$; $ab = 14$. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + 2(a^3 + b^3) = 755.$$

2. Tìm một đa thức bậc ba $P(x)$, biết $P(x)$ chia cho các đa thức $(x-1)$, $(x-2)$, $(x-3)$ đều được dư là 6 và $P(-1) = -18$.

Bài 2. (2,0 điểm)

1. Giả sử p và q là các số nguyên tố thỏa mãn đẳng thức $p(p-1) = q(q^2-1)$. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương k sao cho $p-1 = kq$; $q^2-1 = kp$.

2. Giải phương trình nghiệm nguyên: $2x^2 - 4x = 19 - 3y^2$.

Bài 3. (2,0 điểm)

1. Giải phương trình: $\frac{5}{x^2 - 4x + 5} - x^2 + 4x - 1 = 0$.

2. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{\sqrt{3a^2 + 8b^2 + 14ab}} + \frac{b^2}{\sqrt{3b^2 + 8c^2 + 14bc}} + \frac{c^2}{\sqrt{3c^2 + 8a^2 + 14ca}} \geq \frac{1}{5}(a + b + c)$$

Bài 4. (3,0 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$, trên cạnh AB lấy điểm E và trên cạnh AD lấy điểm F sao cho $AE = AF$. Vẽ AH vuông góc với BF (H thuộc BF), đường thẳng AH cắt các đường thẳng DC và BC lần lượt tại hai điểm M và N .

1. Chứng minh rằng tứ giác $AEMD$ là hình chữ nhật.

2. Biết diện tích tam giác BCH gấp bốn lần diện tích tam giác AEH .

Chứng minh rằng : $AC = 2EF$.

3. Chứng minh rằng : $\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2}$.

Bài 5. (1,0 điểm)

Một giải bóng chuyền có 9 đội bóng tham gia thi đấu vòng tròn 1 lượt (hai đội bất kỳ chỉ thi đấu với nhau 1 trận). Biết đội thứ nhất thắng a_1 trận và thua b_1 trận, đội thứ 2 thắng a_2 trận và thua b_2 trận, ..., đội thứ 9 thắng a_9 trận và thua b_9 trận.

$$\text{Chứng minh rằng } a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_9^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \dots + b_9^2$$

-----Hết-----

Họ và tên thí sinh:Số báo danh.....

HƯỚNG DẪN CHẤM

MÔN: TOÁN 8

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Bài	Nội dung cần đạt	Điểm
1 (2,0đ)	1. Cho hai số a, b thỏa mãn $a + b = 9$; $ab = 14$. Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + 2(a^3 + b^3) = 755.$	
	Ta có: $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 9^2 - 2.14 = 53.$	0,25
	$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = 9^3 - 3.14.9 = 351$	0,25
	$\Rightarrow 2(a^3 + b^3) = 2.351 = 702.$	0,25
	Vậy: $a^2 + b^2 + 2(a^3 + b^3) = 53 + 702 = 755.$	0,25
	2. Tìm một đa thức bậc ba, biết $P(x)$ chia cho $(x - 1)$, $(x - 2)$, $(x - 3)$ đều được dư 6 và $P(-1) = -18$.	
	Theo định lí Bézout ta có: $P(1) = P(2) = P(3) = 6$. Do đó ta đặt $P(x) = d + c(x - 1) + b(x - 1)(x - 2) + a(x - 1)(x - 2)(x - 3)$ Cho $x = 1$ ta được $P(1) = d$, suy ra $d = 6$ $P(x) = 6 + c(x - 1) + b(x - 1)(x - 2) + a(x - 1)(x - 2)(x - 3)$	0,25
	Cho $x = 2$ ta được $P(2) = 6 + c$, suy ra $c = 0$ $P(x) = 6 + 0(x - 1) + b(x - 1)(x - 2) + a(x - 1)(x - 2)(x - 3)$	0,25
	Cho $x = 3$ ta được $P(3) = 6 + 2b$, suy ra $b = 0$ $P(x) = 6 + 0(x - 1) + 0(x - 1)(x - 2) + a(x - 1)(x - 2)(x - 3)$ Do đó $P(x) = 6 + a(x - 1)(x - 2)(x - 3)$	0,25
	Cho $x = -1$ ta được $P(-1) = 6 - 24a$, do đó $-18 = 6 - 24a$ suy ra $a = 1$. Vậy $P(x) = 6 + 1.(x - 1)(x - 2)(x - 3)$ Rút gọn ta được: $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x.$	0,25
	1. Giả sử p và q là các số nguyên tố thỏa mãn đẳng thức $p(p - 1) = q(q^2 - 1)$. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương k sao cho $p - 1 = kq$; $q^2 - 1 = kp$.	
	Nếu $p = q$ thì ta có $p - 1 = q^2 - 1 \Rightarrow \begin{cases} p = q = 0 \\ p = q = 1 \end{cases}$, điều này vô lí vì p, q là các số nguyên tố.	0,25
	Do đó $p \neq q$, khi đó do p, q là các số nguyên tố nên $(p - 1) : q$; $(q^2 - 1) : p$.	0,25
	Như vậy tồn tại các số nguyên dương m, n thỏa mãn $p - 1 = mq$; $q^2 - 1 = np$.	0,25

2 (2,0đ)	Thay vào đẳng thức đã cho ta được $p.mq = q.np \Rightarrow m = n$	
	Vậy tồn tại số nguyên dương $k(=m=n)$ sao cho $\begin{cases} p-1=kq \\ q^2-1=kp \end{cases}$.	0,25
	Giải phương trình nghiệm nguyên: $2x^2 - 4x = 19 - 3y^2$.	
	Biến đổi phương trình đã cho ta được : $2x^2 - 4x = 19 - 3y^2 \Leftrightarrow 2(x-1)^2 + 3y^2 = 21$	0,25
	Suy ra : $3y^2 \leq 21 \Rightarrow y^2 \leq 7 \Rightarrow y^2 \in \{0;1;4\}$.	0,25
	Với $y^2 = 0 \Rightarrow 2(x-1)^2 = 21$. PT không có nghiệm nguyên. Với $y^2 = 1 \Rightarrow 2(x-1)^2 = 18 \Rightarrow (x-1)^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x-1=3 \\ x-1=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-2 \end{cases}$ $x=4 \Rightarrow y=\pm 1$; $x=-2 \Rightarrow y=\pm 1$ Ta được $(x,y) \in \{(-2;1);(-2;-1);(4;1);(4;-1)\}$.	0,25
	Với $y^2 = 4 \Rightarrow 2(x-1)^2 = 9$. PT không có nghiệm nguyên. Vậy PT đã cho có các nghiệm nguyên (x,y) là: $(-2;1);(-2;-1);(4;1);(4;-1)$	0,25
3 (2,0đ)	Giải phương trình: $\frac{5}{x^2-4x+5} - x^2 + 4x - 1 = 0$.	
	ĐKXD: $x \in \mathbb{R}$ do $x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.	0,25
	Đặt $x^2 - 4x + 5 = y$ thì $y \geq 1$ và $-x^2 + 4x - 1 = -y + 4$. Phương trình đã cho trở thành:	0,25
	$\frac{5}{y} - y + 4 = 0 \Rightarrow 5 - y^2 + 4y = 0 \Leftrightarrow (y-5)(y+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=5 \\ y=-1(\text{loại}) \end{cases}$	0,25
	Với $y=5$ ta có $x^2 - 4x + 5 = 5 \Leftrightarrow x(x-4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=4 \end{cases}$ Vậy PT đã cho có tập nghiệm là: $S = \{0;4\}$.	0,25
	Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}} + \frac{b^2}{\sqrt{3b^2+8c^2+14bc}} + \frac{c^2}{\sqrt{3c^2+8a^2+14ca}} \geq \frac{1}{5}(a+b+c)$	
	Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có: $\sqrt{3a^2+8b^2+14ab} = \sqrt{(a+4b)(3a+2b)} \leq \frac{1}{2}(4a+6b) = 2a+3b$	0,25
	Tương tự ta có:	0,25

	$\sqrt{3b^2 + 8c^2 + 14bc} \leq 2b + 3c; \quad \sqrt{3c^2 + 8a^2 + 14ca} \leq 2c + 3a.$	
	Do đó: $\frac{a^2}{\sqrt{3a^2 + 8b^2 + 14ab}} + \frac{b^2}{\sqrt{3b^2 + 8c^2 + 14bc}} + \frac{c^2}{\sqrt{3c^2 + 8a^2 + 14ca}}$ $\geq \frac{a^2}{2a + 3b} + \frac{b^2}{2b + 3c} + \frac{c^2}{2c + 3a} \quad (1)$	0,25
	Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có: $\frac{a^2}{2a + 3b} + \frac{b^2}{2b + 3c} + \frac{c^2}{2c + 3a} \geq \frac{(a + b + c)^2}{2a + 3b + 2b + 3c + 2c + 3a} = \frac{1}{5}(a + b + c) \quad (2)$ Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $a = b = c$.	0,25
4 (3,0đ)	Cho hình vuông $ABCD$, trên cạnh AB lấy điểm E và trên cạnh AD lấy điểm F sao cho $AE = AF$. Vẽ AH vuông góc với BF (H thuộc BF), đường thẳng AH cắt các đường thẳng DC và BC lần lượt tại hai điểm M và N. - Chứng minh rằng tứ giác $AEMD$ là hình chữ nhật. - Biết diện tích tam giác BCH gấp bốn lần diện tích tam giác AEH. Chứng minh rằng: $AC = 2EF$. - Chứng minh rằng: $\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2}$.	
	a) Ta có: $\angle MAD = \angle ABF$ (cùng phụ với $\angle BAH$) $AB = AD$ (gt); $\angle BAF = \angle ADM = 90^\circ$ ($ABCD$ là hình vuông) $\Rightarrow \triangle ADM = \triangle BAF$ (g.c.g)	0,25
	$\Rightarrow DM = AF$, mà $AF = AE$ (gt) nên $AE = DM$	0,25
	Lại có: $AE \parallel DM$ (vì $AB \parallel DC$) Suy ra tứ giác $AEMD$ là hình bình hành.	0,25

	Mặt khác $\widehat{DAE} = 90^0(gt)$ Vậ tứ giác $AEMD$ là hình chữ nhật	0,25
	b) Ta có $\triangle ABH \# \triangle FAH(g.g)$ $\Rightarrow \frac{AB}{AF} = \frac{BH}{AH}$ hay $\frac{BC}{AE} = \frac{BH}{AH} (AB = BC; AE = AF)$	0,25
	Lại có: $\widehat{HAB} = \widehat{HBC}$ (cùng phụ với $\widehat{ABH}$) $\Rightarrow \triangle CBH \# \triangle AEH(c.g.c)$	0,25
	$\Rightarrow \frac{S_{CBH}}{S_{EAH}} = \left(\frac{BC}{AE}\right)^2$, mà $\frac{S_{CBH}}{S_{EAH}} = 4(gt) \Rightarrow \left(\frac{BC}{AE}\right)^2 = 4 \Rightarrow BC^2 = (2AE)^2$	0,25
	$\Rightarrow BC = 2AE \Rightarrow E$ là trung điểm của AB , F là trung điểm của AD Do đó: $BD = 2EF$ hay $AC = 2EF$.	0,25
	c) Do $AD \parallel CN(gt)$. Áp dụng hệ quả của định lí Ta-let ta có: $\Rightarrow \frac{AD}{CN} = \frac{AM}{MN} \Rightarrow \frac{AD}{AM} = \frac{CN}{MN}$	0,25
	Lại có: $MC \parallel AB(gt)$. Áp dụng hệ quả của định lí Ta-let ta có: $\frac{MN}{AN} = \frac{MC}{AB} \Rightarrow \frac{AB}{AN} = \frac{MC}{MN}$ hay $\frac{AD}{AN} = \frac{MC}{MN}$	0,25
	$\Rightarrow \left(\frac{AD}{AM}\right)^2 + \left(\frac{AD}{AN}\right)^2 = \left(\frac{CN}{MN}\right)^2 + \left(\frac{CM}{MN}\right)^2 = \frac{CN^2 + CM^2}{MN^2} = \frac{MN^2}{MN^2} = 1$	0,25
	$\Rightarrow \left(\frac{AD}{AM}\right)^2 + \left(\frac{AD}{AN}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{AD^2} \quad (dfcm)$	0,25
5 (1,0đ)	Một giải bóng chuyền có 9 đội bóng tham gia thi đấu vòng tròn 1 lượt (hai đội bất kỳ chỉ thi đấu với nhau 1 trận). Biết đội thứ nhất thắng a_1 trận và thua b_1 trận, đội thứ 2 thắng a_2 trận và thua b_2 trận, ..., đội thứ 9 thắng a_9 trận và thua b_9 trận. Chứng minh rằng $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_9^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \dots + b_9^2$.	
	Mỗi đội bóng thi đấu với 8 đội bóng khác và hai đội bất kỳ chỉ gặp nhau 1 trận nên mỗi đội sẽ thi đấu 8 trận $\Rightarrow a_i + b_i = 8$ (với $i = 1; 2; 3; \dots; 8$)	0,25
	Đẳng thức cần chứng minh tương đương với: $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_9^2 = (8 - a_1)^2 + (8 - a_2)^2 + (8 - a_3)^2 + (8 - a_9)^2$ $\Leftrightarrow 16(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_9) = 576 \quad (1)$	0,25
	Mặt khác, tổng số trận thắng của các đội bằng tổng số trận đấu nên : $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_9 = \frac{9.8}{2} = 36 \quad (2)$	0,25
	Từ (1) và (2) suy ra đẳng thức cần chứng minh luôn đúng. Vậy $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_9^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \dots + b_9^2$.	0,25

* **Chú ý:**

+ Học sinh làm cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa.

+ Điểm toàn bài làm tròn đến 0,25 điểm.