

UBND QUẬN HAI BÀ TRUNG
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CÁC MÔN
VĂN HÓA VÀ MÔN KHOA HỌC CẤP QUẬN
MÔN: TOÁN 9

Năm học: 2021 - 2022

Ngày thi: 17/02/2022

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian phát đề)

Bài I. (5,0 điểm)

1) Giải phương trình: $x^2 + x - 4\sqrt{3x+1} + 6 = 0$.

2) Cho x, y, z là các số thực khác 0 và thỏa mãn điều kiện: $xy + yz + zx = 0$. Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y}$.

Bài II. (5,0 điểm)

1) Cho a, b, c là các số nguyên thỏa mãn $a^3 + b^3 = 2021c^3$. Chứng minh $a + b + c$ chia hết cho 6.

2) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $x^3 - x^2y + x - 2y + 5 = 0$.

Bài III. (2,0 điểm)

Cho các số thực x, y thỏa mãn $x - \sqrt{2x} = \sqrt{y} - y$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + y + \frac{1}{\sqrt{x+y+1}}$.

Bài IV. (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn, nội tiếp đường tròn (O) đường kính AK . Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Đường thẳng EF cắt đường tròn (O) tại hai điểm P, Q (P và C khác phía đối với AB). Gọi M là trung điểm BC .

1) Chứng minh tứ giác $BHCK$ là hình bình hành, từ đó suy ra $OAC = BAH$.

2) Chứng minh $AP^2 = 2AD \cdot OM$.

3) Dây KQ cắt BC tại L . Chứng minh AL, HQ cắt nhau tại một điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF .

Bài V. (2,0 điểm)

1) Cho x là số nguyên dương. Tìm tất cả số nguyên dương n để $4x^n + (x+1)^2$ là số chính phương.

2) Trong buổi lễ tuyên dương học sinh tiêu biểu lớp 9 của quận Hai Bà Trưng, có 20 học sinh nam và 22 học sinh nữ của các trường được vinh dự tham gia. Người ta nhận thấy trong các học sinh đó:

- Không có học sinh nam nào quen tất cả các học sinh nữ
- Mỗi học sinh nữ quen ít nhất một học sinh nam

Chứng tỏ rằng: Tồn tại hai học sinh nam A, B và hai học sinh nữ M, N sao cho A và M quen nhau, B và N quen nhau, nhưng A và N không quen nhau, B và M không quen nhau.

----- HẾT -----

Lưu ý: Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên: Số báo danh: Trường THCS

.....

ĐỀ CHÍNH THỨC

Bài I. (5 điểm)

1) (2,5 điểm) Giải phương trình: $x^2 + x - 4\sqrt{3x+1} + 6 = 0$.

ĐKXD: $x \geq -\frac{1}{3}$.

(0,5 điểm)

Ta viết lại phương trình thành: $(x^2 - 2x + 1) + (3x + 1 - 4\sqrt{3x+1} + 4) = 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (\sqrt{3x+1} - 2)^2 = 0$$

(1,0 điểm)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 0 \\ (\sqrt{3x+1} - 2)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1. \text{ (TM ĐKXD)}$$

(1,0 điểm)

2) (2,5 điểm). Tính giá trị của biểu thức: $A = \frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y}$.

Ta có:

$$A = \frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} = \frac{x+y+z}{z} + \frac{x+y+z}{x} + \frac{x+y+z}{y} - 3$$

(0,5 điểm)

Từ đó biến đổi được

$$A = (x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - 3$$

(0,5 điểm)

Với giả thiết $xy + yz + xz = 0$ ta có $A = (x+y+z) \cdot \frac{xy + yz + xz}{xyz} - 3 = -3$.

(0,5 điểm)

Bài II. (5 điểm)

1) (2,5 điểm) Chứng minh $a+b+c$ chia hết cho 6.

Ta có: $a^3 + b^3 = 2021c^3 \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 2022c^3$:

(0,5 điểm)

Mặt khác, ta dễ dàng chứng minh được $n^3 - n$: 6

(1,0 điểm)

Từ đó $a^3 + b^3 + c^3 - (a+b+c) = (a^3 - a) + (b^3 - b) + (c^3 - c) : 6$

Do đó $a+b+c$ chia hết cho 6.

(1,0 điểm)

2) (2,5 điểm) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $x^3 - x^2y + x - 2y + 5 = 0$.

$$x^3 - x^2y + x - 2y + 5 = 0 \Rightarrow y = \frac{x^3 + x + 5}{x^2 + 2} = x + \frac{5-x}{x^2 + 2} \in \mathbb{Q}$$

Mà x, y là các số nguyên suy ra $\frac{5-x}{x^2 + 2} \in \mathbb{Q}$ (0,5 điểm)

Suy ra: $5-x \vdots x^2 + 2$

$$\Rightarrow (5-x)(5+x) \vdots x^2 + 2$$

$$\Rightarrow 27 - (x^2 + 2) \vdots x^2 + 2$$

$$\Rightarrow 27 \vdots x^2 + 2$$

$$\Rightarrow x^2 + 2 \in U(27). \text{ Mà } x^2 + 2 \geq 2 \forall x \quad (1 \text{ điểm})$$

$$\text{Suy ra: } x^2 + 2 \in \{3; 9; 27\}$$

$$\text{Tìm được } x \in \{\pm 1, \pm 5\}$$

$$\text{Với } x = 1 \Rightarrow y = \frac{7}{3} \text{ (loại)}$$

$$\text{Với } x = -1 \Rightarrow y = 1$$

$$\text{Với } x = 5 \Rightarrow y = 5$$

$$\text{Với } x = -5 \Rightarrow y = -\frac{125}{27} \text{ (loại)}$$

Thử lại rồi kết luận: các cặp số nguyên (x, y) cần tìm là $\{(-1; 1); (5; 5)\}$. (1 điểm)

Bài III. (2,0 điểm)

Cho các số thực x, y thỏa mãn $x - \sqrt{2x} = \sqrt{y} - y$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + y + \frac{1}{\sqrt{x+y+1}}$.

Điều kiện: $x \geq 0; y \geq 0$.

Áp dụng BĐT Bunhiacopxxki, ta có:

$$0 \leq x + y = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x} + 1 \cdot \sqrt{y} \leq \sqrt{3(x+y)} \Rightarrow 0 \leq x + y \leq 3 \Leftrightarrow 1 \leq x + y + 1 \leq 4. \quad (0,5 \text{ điểm})$$

Tìm GTNN:

$$P = x + y + \frac{1}{\sqrt{x+y+1}} = \left[(x+y+1) + \frac{1}{\sqrt{x+y+1}} \right] - 1 \geq 2 \sqrt{(x+y+1) \cdot \frac{1}{\sqrt{x+y+1}}} - 1 \geq 2 - 1 = 1$$

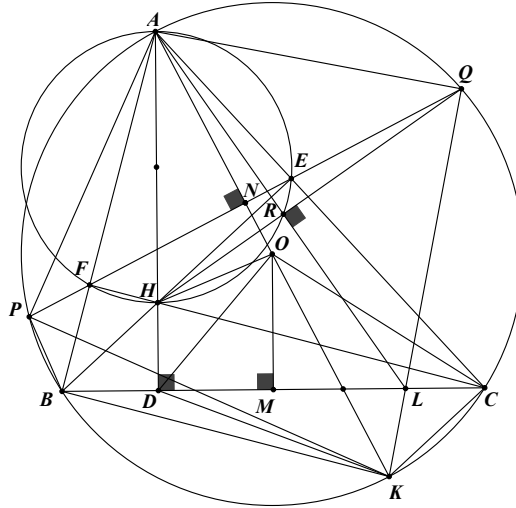
Từ đó P đạt giá trị nhỏ nhất bằng 1 khi $x = y = 0$. (0,75 điểm)

Tìm GTLN: Đặt $t = \sqrt{x+y+1}; 1 \leq t \leq 2$.

$$\text{Xét hiệu: } P - \frac{7}{2} = \left(t^2 + \frac{1}{t} - 1 \right) - \frac{7}{2} = \frac{2t^3 - 9t + 2}{2t} = \frac{(t-2)(2t^2 + 4t - 1)}{2t} \leq 0 \text{ (do } 1 \leq t \leq 2).$$

Từ đó P đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{7}{2}$ khi $x = 2, y = 1$. (0,75 điểm)

Bài IV. (6,0 điểm)



1) **(3,0 điểm)** Chứng minh tứ giác $BHCK$ là hình bình hành, từ đó suy ra $OAC = BAH$.

Dễ chứng minh: $BH \parallel CK; BK \parallel CH$ suy ra tứ giác $BHCK$ là hình bình hành. **(1,5 điểm)**

Từ đó $BH = CK$, suy ra tam giác $\triangle BDA \sim \triangle KCA$ (c.g.c) **(1,0 điểm)**

dẫn tới $OAC = BAH$. (1) **(0,5 điểm)**

2) **(2,0 điểm)** Chứng minh $AP^2 = 2AD \cdot OM$.

Ta có $\triangle ANF \sim \triangle ABK$ (g.g) dẫn đến $AP^2 = AN \cdot AK = AF \cdot AB$ **(0,5 điểm)**

Mặt khác: $\triangle AFH \sim \triangle ABD$ (g.g) nên $AF \cdot AB = AD \cdot AH$ **(0,5 điểm)**

Hơn nữa $AH = 2OM$ (OM là đường trung bình trong tam giác AHK) **(0,5 điểm)**

Dẫn đến $AP^2 = 2OM \cdot AD$. **(0,5 điểm)**

3) **(1,0 điểm)** Chứng minh AL, HQ cắt nhau tại một điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF .

Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt AL tại điểm thứ hai R , suy ra $ARH = 90^\circ$. Ta có

$AR \cdot AL = AH \cdot AD = AP^2$. Mặt khác từ (1) suy ra được OA vuông góc với PQ , dẫn tới $AP = AQ$.

Do đó $AR \cdot AL = AH \cdot AD = AP^2 = AQ^2$. **(0,5 điểm)**

Vậy $\triangle ARQ \sim \triangle AQL$ (c.g.c). Suy ra $ARQ = AQL = 90^\circ$ nên $QR \perp AL$ hay ba điểm H, R, Q thẳng hàng.

Từ đó HQ, AL cắt nhau tại một điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF . **(0,5 điểm)**

Bài V. (2,0 điểm)

1) **(1,0 điểm)** Tìm tất cả số nguyên dương n để $4x^n + (x+1)^2$ là số chính phương.

Ta có $4x^n + (x+1)^2 = y^2 \Leftrightarrow (y-x-1)(y+x+1) = 4x^n$ (*). Nhận thấy $(y-x-1) + (y+x+1) = 2y$ suy ra $(y-x-1), (y+x+1)$ cùng tính chẵn lẻ, hơn nữa $(y-x-1), (y+x+1) \mid 4x^n$ suy ra $(y-x-1), (y+x+1)$ cùng chẵn. Đặt $y-x-1 = 2a \Rightarrow y+x+1 = 2(a+x+1)$ thay vào (*) ta có: $a(a+x+1) = x^n$.

Giả sử d là một ước nguyên tố chung của a và $a+x+1$. Khi đó ta có $\begin{cases} a: \\ a+x+1: \end{cases}$

Từ đó $x^n \vdots \vdots$, dẫn tới 1 chia hết cho d (VÔ LÍ). Vậy $(a, a+x+1)=1$.

Suy ra $a=u^n, a+x+1=v^n$ với $x=uv$ và do đó $uv+1=v^n-u^n$. (0,5 điểm)

Dễ thấy với $n=1$ thì $(u-1)(v+1)>0 \Rightarrow uv+1>v-u$ nên không có x thỏa mãn.

Với $n \geq 3$ thì $v^n-u^n=(v-u)(v^{n-1}+v^{n-2}u+\dots+u^{n-1}) \geq uv+2$ suy ra n chỉ có thể bằng 2.

Khi $n=2$ ta có: $4x^2+(x+1)^2=y^2$ (*) dễ thấy $x=2, y=5$ thỏa mãn. (0,5 điểm)

2) (1,0 điểm)

Trong 20 học sinh nam, gọi A là bạn quen nhiều học sinh nữ nhất.

Vì A không quen tất cả các bạn nữ, nên tồn tại một học sinh nữ N không quen A.

Vì N quen ít nhất một bạn nam, gọi học sinh nam đó là B. (0,5 điểm)

Ta chứng minh: Trong các học sinh nữ quen A, có một học sinh không quen B.

Thật vậy: Giả sử tất cả học sinh nữ quen A đều quen B. Như vậy B quen nhiều bạn nữ hơn A (vì B còn quen cả N). Điều này mâu thuẫn với quy định A là bạn quen nhiều học sinh nữ nhất.

Từ đó có một học sinh nữ quen A mà không quen B, đó là bạn M. (0,5 điểm)

Lưu ý: mọi cách làm khác nếu đúng, giám khảo thống nhất quyết định cho điểm.