

(Đề thi gồm 05 câu, trong 02 trang)

Câu 1. (5,0 điểm)

1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^4 + 2024x^2 + 2023x + 2024$

b) $x(x+4)(x+6)(x+10)+128$

2. Cho x, y là các số hữu tỷ khác 1 thỏa mãn: $\frac{1-2x}{1-x} + \frac{1-2y}{1-y} = 1$.

Chứng minh $M = x^2 + y^2 - xy$ là bình phương của một số hữu tỷ.

3. Cho biểu thức $A = \frac{x^3 + x^2}{x^3 - 2x^2 + x} : \left(\frac{x^2 + x}{x^2} + \frac{1}{x-1} + \frac{2-x^2}{x^2-x} \right)$ với $x \neq 0; x \neq \pm 1$

a) Rút gọn biểu thức

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A khi $x > 1$.

Câu 2. (4,0 điểm)

1. Giải các phương trình sau: $\frac{4}{x^2-4} + \frac{1}{x^2+5x+6} = \frac{-5}{4}$

2. Cho $a+b+c=2025$. Tính giá trị biểu thức: $P = \frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc}$.

3. Cho hai đa thức $P(x) = ax^4 + bx^3 + 1$ và $Q(x) = x^2 - 2x + 1$. Xác định các giá trị của a và b để đa thức $P(x)$ chia hết cho đa thức $Q(x)$.

Câu 3. (4,0 điểm)

1. Cho a, b là 2 số dương thỏa mãn $a+b \leq \frac{4}{5}$. Chứng minh: $P = a+b + \frac{a+b}{ab} \geq \frac{29}{5}$.

2. Tìm các số tự nhiên n để $(n^2-8)^2+36$ là số nguyên tố.

Câu 4. (6,0 điểm)

1. Cho ΔABC vuông tại A có $AB < AC$. Kẻ đường cao AH ($H \in BC$), phân giác AM ($M \in BC$). Kẻ ME vuông góc với AB tại E , MF vuông góc với AC tại F .

a) Chứng minh: $BE \cdot BA = BH \cdot BM$ và HE là tia phân giác của góc AHB .

b) Chứng minh: $\frac{BE}{CF} = \frac{HB}{HC}$.

2. Một khối chóp đựng nước có dạng hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có chiều cao bằng 9 dm, diện tích toàn phần bằng 204 dm^2 và diện tích xung quanh bằng 168 dm^2 . Giả sử người ta sử dụng khối chóp này để chứa nước tưới tiêu cho cây hoa màu. Biết rằng cứ cách

một ngày sẽ phải tưới nước một lần, mỗi lần tưới hết 10 lít nước. Hỏi sau bao nhiêu ngày sẽ dùng hết số nước trong khối chóp?

Câu 5. (1,0 điểm)

1. Trong 43 học sinh làm bài kiểm tra, không có học sinh nào bị điểm dưới 2, chỉ có 2 học sinh đạt điểm 10. Chứng minh rằng ít nhất cũng tìm được 6 học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau (điểm kiểm tra là một số tự nhiên).

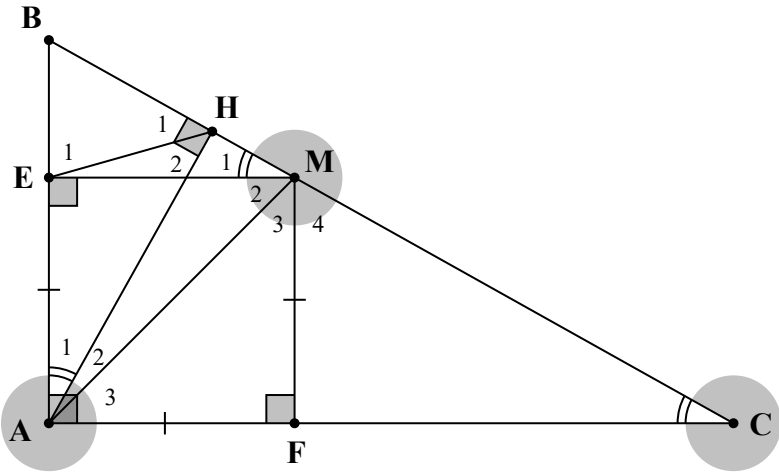
2. Hai đội bóng bàn của hai trường A và B thi đấu giao hữu. Biết rằng mỗi đối thủ của đội trường A phải lần lượt gặp các đối thủ của đội trường B một lần và số trận đấu gấp đôi tổng số đối thủ của hai đội. Tính số đối thủ của trường A và trường B.

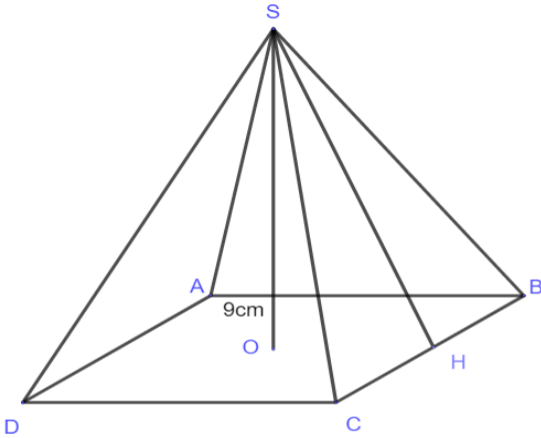
-----**Hết**-----

Câu	Đáp án	Điểm
Câu 1 (5,0 điểm)	1. (1,0 điểm)	
	a) $= (x^4 - x) + (2024x^2 + 2024x + 2024)$	0,25
	$= x(x^3 - 1) + 2024(x^2 + x + 1)$	
	$= x(x - 1)(x^2 + x + 1) + 2024(x^2 + x + 1)$	0,25
	$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2024)$	
	b) (0,5 điểm) $x^4 + 2024x^2 + 2023x + 2024$	
	$x(x + 4)(x + 6)(x + 10) + 128$	0,25
	$= (x^2 + 10x)(x^2 + 10x + 24) + 128$	
	Đặt $x^2 + 10x + 12 = t$. Khi đó:	0,25
	$= (t - 12)(t + 12) + 128 = t^2 - 144 + 128$	
	$= t^2 - 16 = (t - 4)(t + 4)$	
	$= (x^2 + 10x + 16)(x^2 + 10x + 8) = (x + 2)(x + 8)(x^2 + 10x + 8)$	
	2. (1,0 điểm)	
	Ta có: $\frac{1-2x}{1-x} + \frac{1-2y}{1-y} = 1 \Leftrightarrow (1-2x)(1-y) + (1-2y)(1-x) = (1-x)(1-y)$	0,25
	$\Leftrightarrow 1 - y - 2x + 2xy + 1 - x - 2y + 2xy = 1 - x - y + xy$	0,25
	$\Leftrightarrow 3xy = 2x + 2y - 1$	
	$\Rightarrow M = x^2 + y^2 - xy = (x + y)^2 - 3xy$	0,25
	$= (x + y)^2 - (2x + 2y - 1) = (x + y)^2 - 2(x + y) + 1 = (x + y - 1)^2$	
	Mà x, y là các số hữu tỷ khác 1	0,25
	$\Rightarrow M = x^2 + y^2 - xy$ là bình phương của một số hữu tỷ (đpcm).	
	3. (1,0 điểm) $x \neq 0; x \neq \pm 1$	
	$A = \frac{x^3 + x^2}{x^3 - 2x^2 + x} : \left(\frac{x^2 + x}{x^2} + \frac{1}{x-1} + \frac{2-x^2}{x^2-x} \right)$	
	$= \frac{x^2(x+1)}{x(x-1)^2} : \left(\frac{x(x+1)}{x^2} + \frac{1}{x-1} + \frac{2-x^2}{x(x-1)} \right)$	0,25
	$= \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \frac{(x+1)(x-1) + x + 2 - x^2}{x(x-1)}$	0,25

	$= \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} \cdot \frac{x+1}{x(x-1)}$	0,25
	$= \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} \cdot \frac{x(x-1)}{x+1} = \frac{x^2}{x-1}.$	0,25
b) (1,0 điểm)		
	Ta có $\frac{x^2}{x-1} = x+1 + \frac{1}{x-1} = x-1 + \frac{1}{x-1} + 2$	0,25
	Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số dương $x-1$ và $\frac{1}{x-1}$ khi $x > 1$.	0,25
	$x-1 + \frac{1}{x-1} \geq 2\sqrt{(x-1) \cdot \frac{1}{x-1}} = 2 \Rightarrow x-1 + \frac{1}{x-1} + 2 \geq 2+2=4$	0,25
	Dấu “=” xảy ra khi $x-1 = \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow (x-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=1 \\ x-1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \text{ (TM)} \\ x=0 \text{ (L)} \end{cases}$	0,25
	Vậy $P_{\min} = 4$ khi $x = 2$.	
Câu 2 (4,0 điểm)	1.(1,5 điểm)	
	Ta có $\frac{4}{x^2-4} + \frac{1}{x^2+5x+6} = \frac{-5}{4} \quad (\text{ĐK: } x \neq \pm 2; x \neq -3)$	
	$\Leftrightarrow \frac{4}{(x-2)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{-5}{4}$ $\Leftrightarrow \frac{4(x+3)}{(x-2)(x+2)} + \frac{(x-2)}{(x+2)(x+3)} = \frac{-5}{4}$	0,25
	$\Leftrightarrow \frac{5x+10}{(x^2-4)(x+3)} = \frac{-5}{4} \Leftrightarrow \frac{x+2}{x^3-4x+3x^2-12} = \frac{-1}{4}$	0,25
	$\Leftrightarrow x^3+3x^2-4=0 \Leftrightarrow x^3-x^2+4x^2-4=0$ $\Leftrightarrow x^2(x-1)+4(x-1)(x+1)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+4x+4)=0$ $\Leftrightarrow (x-1)(x+2)^2=0$	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \text{ (TM)} \\ x=-2 \text{ (L)} \end{cases}$	0,25
	Vậy tập nghiệm là $S = \{1\}$	0,25
	2.(1,0 điểm)	
	Ta có: $a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b)^3+c^3-3a^2b-3ab^2-3abc$	0,25
	$= (a+b+c) \left[(a+b)^2 - (a+b)c + c^2 \right] - 3ab(a+b+c)$	
$= (a+b+c) \left[(a+b)^2 - (a+b)c + c^2 - 3ab \right]$	0,25	
$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$		
$\Rightarrow P = \frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}$	0,25	
$\Rightarrow P = a+b+c \Rightarrow P = 2025$	0,25	

	3.(1,5 điểm)	
	$Q(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ nên đa thức $Q(x)$ có nghiệm $x = 1$ Áp dụng định lý Bôzơ ta được $P(x):Q(x) \Rightarrow P(1) = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow a + b + 1 = 0 \Leftrightarrow b = -a - 1$	0,5
	Thay $b = -a - 1 \Rightarrow P(x) = ax^4 - ax^3 - x^3 + 1 = (x-1)(ax^3 - x^2 - x - 1)$	
	$P(x):Q(x) \Leftrightarrow ax^3 - x^2 - x - 1 : x - 1$	0,5
	Đặt $R(x) = ax^3 - x^2 - x - 1$	
	$R(x):(x-1) \Leftrightarrow R(1) = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow a - 1 - 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 3$ Thay $a = 3$ tìm được $b = -4$ Vậy $a = 3; b = -4$ thì đa thức $P(x)$ chia hết cho đa thức $Q(x)$	
Câu 3 (4,0 điểm).	1.(2,0 điểm) Với $a, b > 0$, ta có $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$	0,25
	Mà $a + b \leq \frac{4}{5}$ nên $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 5$ (1)	0,25
	Biến đổi vế trái: $P = a + b + \frac{a+b}{ab}$ $= a + b + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = a + b + \frac{4}{25a} + \frac{21}{25a} + \frac{4}{25b} + \frac{21}{25b}$ $= \left(a + \frac{4}{25a}\right) + \left(b + \frac{4}{25b}\right) + \frac{21}{25}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$	0,5
	Áp dụng bất đẳng thức Cô si với hai số dương ta có: $a + \frac{4}{25a} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{4}{25a}} = \frac{4}{5}$ $b + \frac{4}{25b} \geq 2\sqrt{b \cdot \frac{4}{25b}} = \frac{4}{5}$ (2)	0,25
	Từ (1) và (2) ta có: $P \geq \frac{4}{5} + \frac{4}{5} + \frac{21}{25} \cdot 5 = \frac{29}{5}$	0,25
	Dấu “=” xảy ra khi $a = b = \frac{2}{5}$	0,25
	Vậy $P = a + b + \frac{a+b}{ab} \geq \frac{29}{5}$ (Dấu “=” xảy ra khi $a = b = \frac{2}{5}$)	0,25
	2.(2,0 điểm) Ta có: $(n^2 - 8)^2 + 36 = n^4 - 16n^2 + 64 + 36 = n^4 - 16n^2 + 100$ $= n^4 + 20n^2 + 100 - 36n^2 = (n^2 + 10)^2 - 36n^2 = (n^2 + 10 + 6n)(n^2 + 10 - 6n)$	0,5
	Vì $n \in \mathbb{N}^*$ nên $n^2 + 6n + 10 > n^2 - 6n + 10$	0,25

	để $(n^2 - 8)^2 + 36$ là số nguyên tố thì $\begin{cases} n^2 + 6n + 10 = 1 \\ n^2 - 6n + 10 = 1 \end{cases}$	0,25
	Mà $n^2 + 6n + 10 > n^2 - 6n + 10$ nên $n^2 - 6n + 10 = 1$	0,25
	$\Leftrightarrow n^2 - 6n + 9 = 0 \Leftrightarrow (n - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow n = 3$	0,25
	Với $n = 3 \Rightarrow (n^2 - 8)^2 + 36 = (3^2 - 8)^2 + 36 = 37$ là số nguyên tố	0,25
	Vậy với $n = 3$ thì $(n^2 - 8)^2 + 36$ là số nguyên tố	0,25
Câu 4 (6,0 điểm)	1. (4,0 điểm)	
		0,25
	a) (2,0 điểm)	
	Ta có: $\widehat{M_1} = \widehat{C}$ (đồng vị)	0,25
	Mà: $\widehat{A_1} = \widehat{C}$ (cùng phụ với $\widehat{B}$) $\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{M_1} (= \widehat{C})$	0,25
	Xét $\triangle BEM$ và $\triangle BHA$ có: $\begin{cases} \widehat{A_1} = \widehat{M_1} \text{ (cmt)} \\ \widehat{B} \text{ Chung} \end{cases} \Rightarrow \triangle BEM \sim \triangle BHA \text{ (g.g)}$	0,25
	$\Rightarrow \frac{BE}{BH} = \frac{BM}{BA} \Rightarrow BE \cdot BA = BH \cdot BM$ (đpcm)	0,25
	Xét $\triangle BHE$ và $\triangle BAM$ có: $\begin{cases} \frac{BE}{BH} = \frac{BM}{BA} \text{ (cmt)} \\ \widehat{B} \text{ Chung} \end{cases} \Rightarrow \triangle BHE \sim \triangle BAM \text{ (c.g.c)}$	0,25
	$\Rightarrow \widehat{BHE} = \widehat{BAM}$ (2 góc tương ứng)	0,25
	Mặt khác: AM là tia phân giác của $\widehat{BAC}$ (gt) $\Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{A_2} = 45^\circ$	0,25
	$\Rightarrow \widehat{BHE} = \widehat{BAM} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{H_1} = \widehat{H_2} = 45^\circ \Rightarrow HE$ là tia phân giác của $\widehat{AHB}$ (đpcm)	0,25
	a) (1,75 điểm)	
		0,5

	Ta có: $\begin{cases} \widehat{E} = \widehat{A} = \widehat{F} = 90^\circ \text{ (gt)} \\ \widehat{BAM} = \widehat{MAC} = 45^\circ \text{ (gt)} \end{cases} \Rightarrow \square EMFA \text{ là hình vuông}$ $\Rightarrow EM = MF = FA = AE$	
	Mà: $\triangle BEM \sim \triangle AHC \text{ (g.g)} \left(\text{Do: } \begin{cases} \widehat{E} = \widehat{H} = 90^\circ \\ \widehat{M_1} = \widehat{C} \end{cases} \right)$	0,25
	$\Rightarrow \frac{BE}{AH} = \frac{EM}{HC} \Rightarrow BE.HC = AH.EM = AH.MF \text{ (Do: } EM = MF \text{)} \quad (1)$	0,25
	Mặt khác: $\triangle BHA \sim \triangle MFC \text{ (g.g)} \left(\text{Do: } \begin{cases} \widehat{B} = \widehat{M_4} \\ \widehat{A_1} = \widehat{C} \end{cases} \right)$	0,25
	$\Rightarrow \frac{BH}{MF} = \frac{HA}{FC} \Rightarrow BH.CF = AH.MF \quad (2)$	0,25
	Từ (1) và (2) $\Rightarrow BE.HC = BH.CF (=AH.MF) \Rightarrow \frac{BE}{CF} = \frac{HB}{HC} \text{ (đpcm)}$	0,25
	2. (2,0 điểm)	
		0,25
	+) Ta có: $S_{tp} = S_{xq} + S_{\text{đáy}} \Rightarrow 204 = 168 + S_{\text{đáy}}$	0,25
	Vì S.ABCD là hình chóp tứ giác đều nên đáy ABCD là hình vuông có cạnh là a (dm) $\Rightarrow S_{\text{đáy}} = a.a = 204 - 168 = 36 \text{ dm}^2 \Rightarrow a = 6 \text{ dm}$	0,25
	Vậy cạnh đáy có chiều dài bằng 6 dm.	0,25
	+) Thể tích của hình chóp bằng:	
	$V = \frac{1}{3} . S_{\text{đáy}} . h = \frac{1}{3} . 36 . 9 = 108 \text{ dm}^3$	0,25
	+) Ta có $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ lít}$ nên $108 \text{ dm}^3 = 108 \text{ lít nước}$	0,25
	Do mỗi lần tưới nước chỉ tưới 10 lít nên số nước dùng được trong:	
	$\frac{108}{10} = 10,8 \approx 11 \text{ ngày.}$	0,25
	Theo đầu bài, vì cách một ngày mới tưới nước một lần nên, cần tổng số ngày sử dụng hết 108 lít nước là: $11 + 10 = 21 \text{ ngày.}$	0,25
	1. (1,0 điểm)	
Câu 5 (1,0	Vì có 43 học sinh làm bài kiểm tra, không có học sinh nào bị điểm dưới 2, chỉ có 2 học sinh đạt điểm 10.	0,25

điểm)	Nên có 41 học sinh phân thành 8 loại điểm (từ 2 đến 9)																													
	Giả sử trong 8 loại điểm đều là điểm của không quá 5 học sinh thì lớp có: $5.8 = 40$ học sinh, ít hơn 1 học sinh so với 41. Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại 6 học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau	0,25																												
2. (0,5 điểm)																														
	Gọi a và b lần lượt là số đối thủ của đội trường A và của đội trường B, với $a, b \in N^*$	0,25																												
	Theo đề bài, ta có : $ab = 2(a + b) \Leftrightarrow (a - 2)(b - 2) = 4$																													
	Do $a, b \in N^* \Rightarrow a - 2 \in Z; b - 2 \in Z$	0,25																												
	Lập bảng :																													
	<table><tr><td>$a - 2$</td><td>-4</td><td>-2</td><td>-1</td><td>1</td><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>$b - 2$</td><td>-1</td><td>-2</td><td>-4</td><td>4</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>a</td><td>-2</td><td>0</td><td>1</td><td>3</td><td>4</td><td>6</td></tr><tr><td>b</td><td>1</td><td>0</td><td>-2</td><td>6</td><td>4</td><td>3</td></tr></table>		$a - 2$	-4	-2	-1	1	2	4	$b - 2$	-1	-2	-4	4	2	1	a	-2	0	1	3	4	6	b	1	0	-2	6	4	3
$a - 2$	-4		-2	-1	1	2	4																							
$b - 2$	-1		-2	-4	4	2	1																							
a	-2	0	1	3	4	6																								
b	1	0	-2	6	4	3																								
	Kết hợp điều kiện ta có : $a = 4; b = 4$ hoặc $a = 3; b = 6$ hoặc $a = 6; b = 3$																													

Chú ý:

1. Bài làm của học sinh đúng đến đâu cho điểm đến đó.
2. Học sinh có thể sử dụng kết quả câu trước làm câu sau.
3. Đối với bài hình, nếu vẽ sai hình hoặc không vẽ hình thì không cho điểm.
4. Nếu thí sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án mà đúng vẫn cho điểm đủ từng phần như hướng dẫn, thang điểm chi tiết do Ban chấm thi thống nhất.
5. Việc chi tiết hoá thang điểm (nếu có) so với thang điểm trong hướng dẫn phải đảm bảo không sai lệch và đảm bảo thống nhất thực hiện trong toàn Ban chấm thi.
6. Tuyệt đối không làm tròn điểm.

----- **Hết** -----