

*Dành cho học sinh thi vào các lớp chuyên tự nhiên**Thời gian làm bài: 120 phút (không kể thời gian phát đề)*Đề thi gồm 01 trang**Câu 1. (2,0 điểm)**

- Tính giá trị biểu thức $P = \sqrt{2024 + 2\sqrt{2023}} - \sqrt{2025 + 2\sqrt{2024}}$.
- Tìm tọa độ của điểm M là giao điểm của đường thẳng $y = x + 1$ với trục Oy .
- Tính diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác vuông có cạnh huyền bằng $2\sqrt{2}$ cm.
- Tính thể tích của hình nón có đường sinh bằng 10 cm và bán kính đáy bằng 6 cm.

Câu 2. (1,5 điểm)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}-1}$ (với $x \geq 0$ và $x \neq 1$).

- Rút gọn biểu thức P .
- Tìm x để $P = \frac{1}{3}$.

Câu 3. (2,5 điểm)

- Cho phương trình $x^2 - (2m+1)x + 4m - 2 = 0$ (1) (với m là tham số).
 - Tìm tất cả giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.
 - Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình (1). Tìm tất cả giá trị của m để x_1, x_2 là độ dài hai cạnh của một hình chữ nhật có độ dài đường chéo bằng $\sqrt{13}$.
- Giải phương trình $6\sqrt{2x+5} + 4\sqrt{x+2} = 3x + 20$.

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm O , AD là đường cao. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của D trên AB, AC .

- Chứng minh tứ giác $AEDF$ nội tiếp và $AE \cdot AB = AF \cdot AC$.
- Gọi AP là đường kính của đường tròn (O). Chứng minh AP vuông góc với EF .
- Gọi H là trực tâm của tam giác ABC . Đường tròn đường kính AH cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai T . Gọi K là trực tâm của tam giác BTC . Chứng minh tam giác HKT vuông tại H .

Câu 5. (1,0 điểm)

1) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{4x^2+3}-2\sqrt{y}=\sqrt{y^2+3}-2\sqrt{2x} \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}=2+\sqrt{y+3-x^2} \end{cases}.$$

2) Xét hai số thực dương x, y thỏa mãn $6x+y=2xy$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$$P=3x+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{42}{y}+(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2.$$

----- **THCS.TOANMATH.com** -----

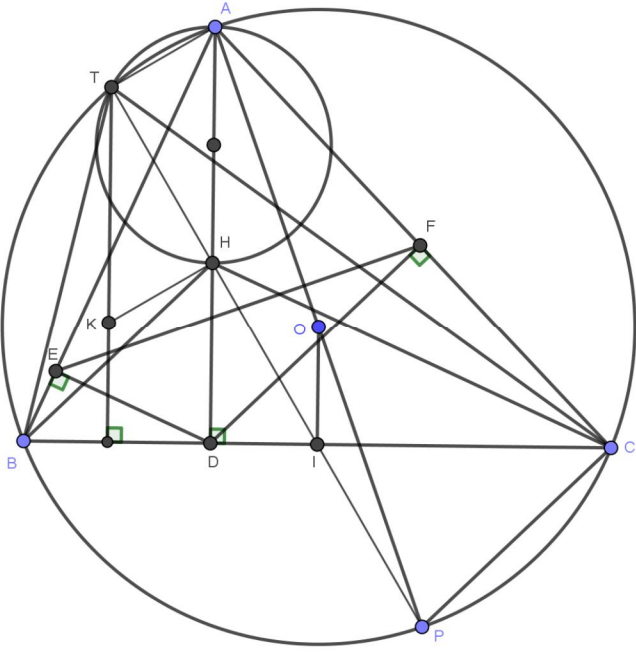
Thí sinh không được sử dụng tài liệu khi làm bài. Giám thị coi thi không giải thích gì thêm./.

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Chữ ký giám thị 1:

Chữ ký giám thị 2:

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1: (2,0 điểm)	1) Tính giá trị biểu thức $P = \sqrt{2024 + 2\sqrt{2023}} - \sqrt{2025 + 2\sqrt{2024}}$.	
	$P = \sqrt{(\sqrt{2023} + 1)^2} - \sqrt{(\sqrt{2024} + 1)^2}$	0,25
	$= \sqrt{2023} + 1 - (\sqrt{2024} + 1) = \sqrt{2023} - \sqrt{2024}$.	0,25
	2) Tìm tọa độ của điểm M là giao điểm của đường thẳng $y = x + 1$ với trục Oy .	
	Tọa độ giao điểm là $M(0;1)$.	0,5
	3) Tính diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác vuông có cạnh huyền bằng $2\sqrt{2} \text{ cm}$.	
	Gọi R là bán kính của đường tròn ngoại tiếp. Từ giả thiết ta có $2R = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow R = \sqrt{2}$.	0,25
	Vậy diện tích của hình tròn là $S = \pi R^2 = 2\pi (\text{cm}^2)$.	0,25
	4) Tính thể tích của hình nón có đường sinh bằng 10 cm và bán kính đáy bằng 6 cm .	
Câu 2: (1,5 điểm)	Cho biểu thức $P = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}-1}$ (với $x \geq 0$ và $x \neq 1$).	
	1) Rút gọn biểu thức P .	
	$P = \frac{x+2+\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)-(x+\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}-1}$	0,25
	$= \frac{x+2+x-\sqrt{x}-x-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}-1}$	0,25
	$= \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}-1}$	0,25
	$= \frac{1}{x+\sqrt{x}+1}$.	0,25
	2) Tìm x để $P = \frac{1}{3}$.	
	$P = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{x+\sqrt{x}+1} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x+\sqrt{x}-2=0$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=1 \\ \sqrt{x}=-2 \end{cases} \Leftrightarrow x=1(l)$.	0,25
Câu 3:	1) Cho phương trình $x^2 - (2m+1)x + 4m - 2 = 0$ (1) (với m là tham số).	

(2,5 điểm)	a) Tìm tất cả giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.	
	Ta có $\Delta = (2m+1)^2 - 4(4m-2) = 4m^2 - 12m + 9$.	0,25
	Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\Delta > 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{3}{2}$.	0,25
	b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình (1). Tìm tất cả giá trị của m để x_1, x_2 là độ dài hai cạnh của một hình chữ nhật có độ dài đường chéo bằng $\sqrt{13}$.	
	Với $m \neq \frac{3}{2}$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x = 2, x = 2m - 1$.	0,25
	Vì x_1, x_2 là độ dài hai cạnh của một hình chữ nhật nên $2m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$.	0,25
	Ta có $x_1^2 + x_2^2 = 13 \Leftrightarrow 2^2 + (2m - 1)^2 = 13 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -1(l) \\ m = 2(tm) \end{cases}$ Vậy $m = 2$.	0,25
	2) Giải phương trình $6\sqrt{2x+5} + 4\sqrt{x+2} = 3x + 20$.	
	Điều kiện: $x \geq -2$.	0,25
	Phương trình trở thành $[(2x+5) - 6\sqrt{2x+5} + 9] + [(x+2) - 4\sqrt{x+2} + 4] = 0$ $\Leftrightarrow (\sqrt{2x+5} - 3)^2 + (\sqrt{x+2} - 2)^2 = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+5} - 3 = 0 \\ \sqrt{x+2} - 2 = 0 \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \sqrt{x+2} - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2(tm)$.	0,25
	Vậy nghiệm của phương trình là $x = 2$.	
Câu 4: (3,0 điểm)	Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm O, AD là đường cao. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của D trên AB, AC.  1) Chứng minh tứ giác $AEDF$ nội tiếp và $AE \cdot AB = AF \cdot AC$.	

	Ta có $\widehat{AED} = 90^\circ$, $\widehat{AFD} = 90^\circ$	0,25
	Xét tứ giác $AEDF$ có $\widehat{AED} + \widehat{AFD} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ suy ra tứ giác $AEDF$ nội tiếp.	0,25
	Trong tam giác vuông ABD có DE là đường cao suy ra $AE \cdot AB = AD^2$ (1).	0,25
	Trong tam giác vuông ACD có DF là đường cao suy ra $AF \cdot AC = AD^2$ (2).	0,25
	Từ (1) và (2) ta có $AE \cdot AB = AF \cdot AC$.	
	2) Gọi AP là đường kính của đường tròn (O) . Chứng minh AP vuông góc với EF .	
	Do $AE \cdot AB = AF \cdot AC \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AB}$, mà $\widehat{BAC}$ chung Suy ra $\triangle AEF \sim \triangle ACB$	0,25
	$\Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{ACB}$	0,25
	Ta có $\widehat{BAP} = \widehat{BCP}$	0,25
	Suy ra $\widehat{AEF} + \widehat{BAP} = \widehat{ACB} + \widehat{BCP} = \widehat{ACP} = 90^\circ$ Vậy AP vuông góc với EF .	0,25
	3) Gọi H là trực tâm của tam giác ABC . Đường tròn đường kính AH cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai T . Gọi K là trực tâm của tam giác BTC . Chứng minh tam giác HKT vuông tại H .	
	Ta có $AH \perp BC$, $TK \perp BC \Rightarrow AH \parallel TK$.	0,25
	Do $BH \perp AC$, $PC \perp AC \Rightarrow BH \parallel PC$. Do $CH \perp AB$, $PB \perp AB \Rightarrow CH \parallel PB$. Suy ra tứ giác $BHCP$ là hình bình hành. Gọi I là trung điểm BC , ta có $OI = \frac{1}{2}AH$.	0,25
	Tương tự $OI = \frac{1}{2}TK \Rightarrow AH = TK$.	0,25
	Khi đó tứ giác $AHKT$ là hình bình hành. $\Rightarrow AT \parallel HK$.	
	Mà $\widehat{ATH} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{THK} = 90^\circ$ Vậy tam giác HKT vuông tại H .	0,25
Câu 5: (1,0 điểm)	1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{4x^2+3}-2\sqrt{y}=\sqrt{y^2+3}-2\sqrt{2x} & (1) \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}=2+\sqrt{y+3-x^2} & (2) \end{cases}$.	
	Điều kiện: $\begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ y \geq 0 \\ y+3-x^2 \geq 0 \end{cases}$. Phương trình (1) trở thành $\sqrt{4x^2+3}-\sqrt{y^2+3}+2\sqrt{2x}-2\sqrt{y}=0$ $\Leftrightarrow (\sqrt{2x}-\sqrt{y}) \left[\frac{(\sqrt{2x}+\sqrt{y})(2x+y)}{\sqrt{4x^2+3}+\sqrt{y^2+3}} + 2 \right] = 0 \Leftrightarrow y=2x$.	0,25
	Thay vào phương trình (2) ta được $\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}=2+\sqrt{2x+3-x^2}$ Đặt $t=\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x} \Rightarrow \sqrt{2x+3-x^2}=\frac{t^2-4}{2}$	0,25

	Khi đó $t = 2 + \frac{t^2 - 4}{2} \Leftrightarrow t^2 - 2t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 2 \end{cases}$ Với $t = 0$ ta được $\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} = 0 (vn)$. Với $t = 2$ ta được $\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)(3-x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1(l) \\ x = 3(tm) \end{cases}$. Với $x = 3 \Rightarrow y = 6$. Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x; y) = (3; 6)$.	
	2) Xét hai số thực dương x, y thỏa mãn $6x + y = 2xy$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 3x + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{42}{y} + (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2.$	
	Ta có $P = 4x + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} + y + \frac{42}{y} + 2\sqrt{xy}$ Do $x > 0, y > 0$ và $6x + y = 2xy$ nên $\frac{1}{x} + \frac{6}{y} = 2$ Mặt khác ta có $2xy = 6x + y \geq 2\sqrt{6xy} \Rightarrow \sqrt{xy} \geq \sqrt{6}$	0,25
	Khi đó $P = \left(2x + 2x + \frac{2}{x^2}\right) + \left(\frac{1}{x} + \frac{6}{y}\right) + \left(y + \frac{36}{y}\right) + 2\sqrt{xy} \geq 3.2 + 2 + 2.6 + 2\sqrt{6}$ $\Rightarrow P \geq 20 + 2\sqrt{6}$. Dấu bằng xảy ra khi $x = 1, y = 6$. Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $20 + 2\sqrt{6}$.	0,25

Chú ý:

- Nếu thí sinh làm đúng, cách giải khác với hướng dẫn chấm, phù hợp kiến thức của chương trình THCS thì tổ chấm thống nhất cho điểm thành phần đảm bảo tổng điểm như hướng dẫn quy định.

- Tổng điểm toàn bài không làm tròn.

----- HẾT -----