

Đề chính thức

MÔN THI: TOÁN (cho tất cả các thí sinh)

Thời gian làm bài: 120 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu I. (3,5 điểm)

1) Giải phương trình

$$\frac{1}{\sqrt{5x^2 + 10x + 30}} + \frac{1}{3\sqrt{x^2 - 2x + 6}} = \frac{1}{3\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{x^4 + 8x^2 + 36}}.$$

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(3 + xy) = 8, \\ \frac{x}{y} + \frac{2y}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5. \end{cases}$$

Câu II. (2,5 điểm)

1) Tìm các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} 27x^3 + 27x^2 + 10y = (x + 3z)^3, \\ 27y^3 + 27y^2 + 10x = (y + 3z)^3. \end{cases}$$

2) Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$(a+2)b^2 + (b+2)c^2 + (c+2)a^2 \geq 8 + abc.$$

Chứng minh rằng

$$2(ab + bc + ca) \leq a^2(a+b) + b^2(b+c) + c^2(c+a).$$

Câu III. (3 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$. Lấy điểm P thuộc cạnh AB (P khác A và B). Gọi J là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác PAD .

1) Chứng minh rằng tứ giác $PJDB$ nội tiếp.

2) Gọi H là trực tâm của tam giác PJD , S là giao điểm của JH và AD . Chứng minh rằng $SH = SD$.

3) Gọi L là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác PBC , K là trực tâm của tam giác LPC . Đường tròn nội tiếp của tam giác PCD tiếp xúc CD tại E . Lấy F thuộc đoạn thẳng CD sao cho $CF = DE$. Chứng minh rằng tam giác FHK vuông cân.

Câu IV. (1 điểm)

Cho bảng ô vuông kích thước (2023×2023) , ô vuông có kích thước (1×1) được gọi là ô vuông đơn vị. Mỗi ô vuông đơn vị của bảng được tô bằng một trong 2 màu đen hoặc trắng sao cho mỗi ô vuông đơn vị tô màu đen được kề với ít nhất 3 ô vuông đơn vị tô màu trắng (2 ô vuông đơn vị có cạnh chung được gọi là kề nhau). Hỏi số ô vuông đơn vị được tô màu đen nhiều nhất là bao nhiêu?

-----HẾT-----

LỜI GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 NĂM HỌC 2024 – 2025



Trường THPT Chuyên Khoa học Tự nhiên

Môn thi: Toán (vòng 1)

Nguyễn Nhất Huy - Trần Nguyễn Đức Nhật

Nguyễn Tiến Lâm - Lê Thanh Lâm

Phan Anh Quân - Trịnh Huy Vũ

1. PHẦN ĐỀ THI

Câu 1 (3,5 điểm).

1) Giải phương trình

$$\frac{1}{\sqrt{5x^2 + 10x + 30}} + \frac{1}{3\sqrt{x^2 - 2x + 6}} = \frac{1}{3\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{x^4 + 8x^2 + 36}}.$$

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(3 + xy) = 8 \\ \frac{x}{y} + \frac{2y}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5. \end{cases}$$

Câu 2 (2,5 điểm).

1) Tìm các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} 27x^3 + 27x^2 + 10y = (x + 3z)^3, \\ 27y^3 + 27y^2 + 10x = (y + 3z)^3. \end{cases}$$

2) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$(a + 2)b^2 + (b + 2)c^2 + (c + 2)a^2 \geq 8 + abc.$$

Chứng minh rằng

$$2(ab + bc + ca) \leq a^2(a + b) + b^2(b + c) + c^2(c + a).$$

Câu 3 (3 điểm). Cho hình vuông $ABCD$. Lấy điểm P thuộc cạnh AB (P khác A và B). Gọi J là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác PAD .

1) Chứng minh rằng tứ giác $PJDB$ nội tiếp.

2) Gọi H là trực tâm của tam giác PJD . S là giao điểm của JH và AD . Chứng minh rằng $SH = SD$.

- 3) Gọi L là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác PBC . K là trực tâm của tam giác LPC . Đường tròn nội tiếp tam giác PCD tiếp xúc với CD tại E . Lấy F thuộc đoạn thẳng CD sao cho $CF = DE$. Chứng minh rằng tam giác FHK vuông cân.

Câu 4 (1 điểm). Cho bảng ô vuông kích thước (2023×2023) , ô vuông kích thước có kích thước (1×1) được gọi là ô vuông đơn vị. Mỗi ô vuông đơn vị của bảng được tô bằng một trong hai màu đen hoặc trắng, sao cho mỗi ô vuông đơn vị được tô màu đen được kề với ít nhất ba ô vuông đơn vị được tô màu trắng (hai ô vuông đơn vị có cạnh chung nhau được gọi là kề nhau). Hỏi số ô vuông đơn vị được tô màu đen nhiều nhất là bao nhiêu?

2. PHẦN LỜI GIẢI

Câu 1: (3,5 điểm)

1) Giải phương trình

$$\frac{1}{\sqrt{5x^2 + 10x + 30}} + \frac{1}{3\sqrt{x^2 - 2x + 6}} = \frac{1}{3\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{x^4 + 8x^2 + 36}}.$$

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(3 + xy) = 8 \\ \frac{x}{y} + \frac{2y}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5. \end{cases}$$

Lời giải.

1) Chú ý là $x^4 + 8x^2 + 36 = (x^2 + 6)^2 - 4x^2 = (x^2 - 2x + 6)(x^2 + 2x + 6)$, nên phương trình tương đương với

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 6}} - \frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 6}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 0$$

Đến đây, xét hai trường hợp:

- $\frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 6}} - \frac{1}{3} = 0$, tương đương $x^2 + 2x + 6 = 9$, giải ra được $x = 1$ hoặc $x = -3$.
- $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 6}} - \frac{1}{\sqrt{5}} = 0$, tương đương $x^2 - 2x + 6 = 5$, giải ra $x = 1$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{1, -3\}$.

2) Điều kiện xác định: $x, y \neq 0$.

Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(3 + xy) = 8 \\ \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(x + 2y + 1) = 8. \end{cases}$$

Hai phương trình trên cho ta $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \neq 0$ nên suy ra

$$3 + xy = x + 2y + 1.$$

Phương trình này tương đương với

$$(x - 2)(y - 1) = 0$$

và tìm được $x = 2$ hoặc $y = 1$.

- Khi $x = 2$ thì thay vào phương trình thứ hai của hệ, ta được

$$y + \frac{3}{y} = \frac{9}{2}$$

tương đương

$$2y^2 - 9y + 6 = 0.$$

Giải phương trình trên tìm được $y = \frac{9 \pm \sqrt{33}}{4}$.

- Khi $y = 1$ thì thay vào phương trình thứ hai của hệ, ta được

$$x + \frac{3}{x} = 4$$

hay tương đương

$$x^2 - 4x + 3 = 0.$$

Giải tìm được $x = 1$ hoặc $x = 3$.

Vậy, hệ đã cho có bốn nghiệm $(x; y)$ là

$$(1; 1), (3; 1), \left(2; \frac{9 \pm \sqrt{33}}{4}\right).$$

□

Câu 2: (2,5 điểm)

1) Tìm các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} 27x^3 + 27x^2 + 10y = (x + 3z)^3, \\ 27y^3 + 27y^2 + 10x = (y + 3z)^3. \end{cases}$$

2) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$(a + 2)b^2 + (b + 2)c^2 + (c + 2)a^2 \geq 8 + abc.$$

Chứng minh rằng

$$2(ab + bc + ca) \leq a^2(a + b) + b^2(b + c) + c^2(c + a).$$

Lời giải.

1) Vì x, y có vai trò bình đẳng nên không mất tính tổng quát giả sử $x \geq y$. Khi đó ta có

$$(3x)^3 < 27x^3 + 27x^2 + 10y = (x + 3z)^3 < (3x + 2)^3$$

Do đó ta suy ra $(x + 3z)^3 = (3x + 1)^3$ suy ra $x + 3z = 3x + 1$ và $10y = 9x + 1$. Điều này tương đương với $3z = 2x + 1$ và $10y = 9x + 1$. Thay vào phương trình (2), ta có

$$(3y)^3 < 27y^3 + 27y^2 + 10x = (y + 3z)^3 = (3y + 1)^3 + x - 1 < (3y + 2)^3.$$

Do đó, ta suy ra $y + 3z = 3y + 1$ và $x = 1$ suy ra $y = 1$ và $z = 1$.

Vậy bộ số (x, y, z) nguyên dương thỏa mãn duy nhất là $(1, 1, 1)$.

2) Hoán vị vòng quanh a, b, c thì bài toán không thay đổi nên không mất tính tổng quát, giả sử b nằm giữa a và c . Ta có

$$\begin{aligned} ab^2 + bc^2 + ca^2 - abc &\leq b(a^2 + c^2) \\ &\leq \frac{b^2 + 1}{2}(a^2 + c^2) \\ &\leq \frac{1}{8}(a^2 + b^2 + c^2 + 1)^2. \end{aligned}$$

Từ đây sử dụng giả thiết, ta suy ra được

$$2(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{(a^2 + b^2 + c^2 + 1)^2}{8} \geq 8$$

hay ta có $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$. Ngoài ra

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3 = (a^2 + 1) + (b^2 + 1) + (c^2 + 1) \geq 2(a + b + c)$$

nên ta có

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq a + b + c.$$

Lại có

$$\begin{aligned} a^2(a+b) + b^2(b+c) + c^2(c+a) &\geq \frac{(a(a+b) + b(b+c) + c(c+a))^2}{2(a+b+c)} \\ &= \frac{((a^2 + b^2 + c^2) + (ab + bc + ca))^2}{2(a+b+c)} \\ &\geq \frac{4(a^2 + b^2 + c^2)(ab + bc + ca)}{2(a+b+c)} \\ &\geq 2(ab + bc + ca). \end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

□

Câu 3: (3 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$. Lấy điểm P thuộc cạnh AB (P khác A và B). Gọi J là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác PAD .

- 1) Chứng minh rằng tứ giác $PJDB$ nội tiếp.
- 2) Gọi H là trực tâm của tam giác PJD . S là giao điểm của JH và AD . Chứng minh rằng $SH = SD$.
- 3) Gọi L là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác PBC . K là trực tâm của tam giác LPC . Đường tròn nội tiếp tam giác PCD tiếp xúc với CD tại E . Lấy F thuộc đoạn thẳng CD sao cho $CF = DE$. Chứng minh rằng tam giác FKH vuông cân.

Lời giải.

- 1) Vì J là tâm nội tiếp của tam giác PAD nên ta có

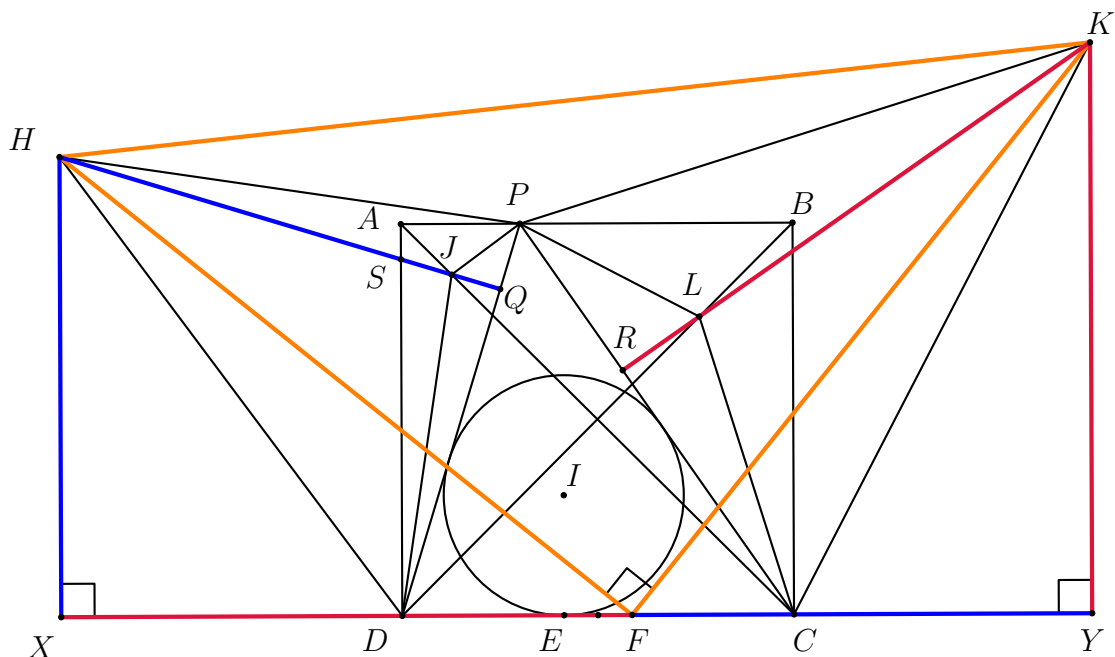
$$\widehat{PJD} = 90^\circ + \frac{1}{2}\widehat{PAD} = 90^\circ + \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 135^\circ.$$

Kết hợp với việc $\widehat{ABD} = 45^\circ$ ta được $\widehat{PJD} + \widehat{PBD} = 180^\circ$. Như vậy tứ giác $PJDB$ nội tiếp.

- 2) Vì $PJ \perp DH$ và PJ là phân giác của $\widehat{APD}$ nên ta có biến đổi góc

$$\widehat{ADH} = \widehat{PDH} - \widehat{PDA} = 90^\circ - \widehat{JPD} - 90^\circ + \widehat{APD} = \widehat{JPD} = \widehat{JHD}.$$

Từ đó suy ra $SH = SD$.



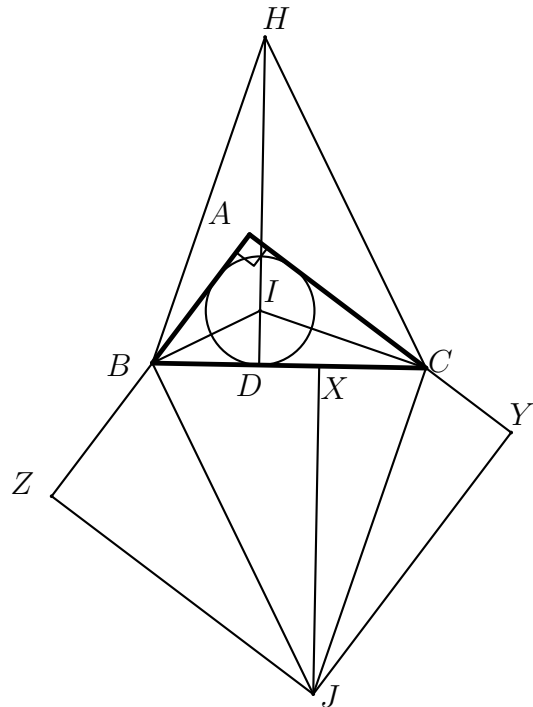
3) Trước hết ta phát biểu và chứng minh bổ đề sau

Bổ đề. Cho tam giác ABC vuông tại A với đường tròn nội tiếp (I) . (I) tiếp xúc với BC tại D . H là trực tâm của tam giác IBC . Khi đó ta có

$$HD = \frac{AB + AC + BC}{2}.$$

Chứng minh bổ đề. Gọi (J) là đường tròn bàng tiếp ứng với đỉnh A của $\triangle ABC$. (J) tiếp xúc với BC, CA, AB tại X, Y, Z . Để ý rằng $HBJC$ là hình bình hành nên H, J đối xứng nhau qua trung điểm của BC . Từ đó do tính đối xứng ta thu được $HD = JX = JY = JZ$. Mặt khác chú ý rằng $AYJZ$ là hình vuông nên ta được $JY = JZ = AY = AZ$. Như vậy,

$$HD = AY = AZ = \frac{AB + AC + BC}{2}.$$



Trở lại bài toán. Hạ $HX \perp CD$ và $KY \perp CD$ với $X, Y \in CD$. HJ cắt PD tại Q và KL cắt PC tại R .

Từ ý 2) kết hợp với $HX \parallel AD$ ta suy ra $\widehat{XHD} = \widehat{ADH} = \widehat{JHD}$, từ đó kéo theo $\triangle HXD = \triangle HQD$ (cạnh huyền - góc nhọn) và $DX = DQ$. Lại chú ý rằng Q chính là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp (J) của $\triangle PAD$ với cạnh PD , ta thu được

$$DX = DQ = \frac{DA + PD - AP}{2} = \frac{PB + PD}{2}.$$

Mặt khác, ta cũng có

$$DF = CE = \frac{PC + CD - PD}{2}.$$

Từ đó, ta thu được

$$XF = DX + DF = \frac{PB + PC + CD}{2} = \frac{PB + PC + BC}{2}.$$

Lập luận tương tự như trên ta thu được $\triangle KRC = \triangle KYC$ (cạnh huyền - góc nhọn) nên thu được $KY = KR$. Áp dụng bổ đề nói trên cho tam giác PBC ta thu được

$$KY = KR = \frac{PB + PC + BC}{2} = XF.$$

Chứng minh tương tự ta cũng được $HX = FY$. Từ đó suy ra $\triangle HXF = \triangle FYK$ (c.g.c), dẫn đến $FH = FK$, $\widehat{XFH} = \widehat{YKF} = 90^\circ - \widehat{YFK}$. Do đó, $\widehat{XFH} + \widehat{YFK} = 90^\circ$ dẫn đến $\widehat{HFK} = 90^\circ$. Như vậy, ta thu được tam giác FHK vuông cân tại F .

□

Câu 4: (1 điểm)

Cho bảng ô vuông kích thước (2023×2023) , ô vuông kích thước có kích thước (1×1) được gọi là ô vuông đơn vị. Mỗi ô vuông đơn vị của bảng được tô bằng một trong hai màu đen hoặc trắng, sao cho mỗi ô vuông đơn vị được tô màu đen được kề với ít nhất ba ô vuông đơn vị được tô màu trắng (hai ô vuông đơn vị có cạnh chung nhau được gọi là kề nhau). Hỏi số ô vuông đơn vị được tô màu đen nhiều nhất là bao nhiêu?

Lời giải. Ta chia bảng ô vuông 2023×2023 thành $\frac{2022^2}{4}$ hình 2×2 , 2022 hình 1×2 và 1 hình 1×1 như sau.

	...		
⋮	⋮	⋮	⋮
	...		
	...		

(**Chú thích:** Trong hình trên, các hình 2×2 sẽ xếp thành một hình 2022×2022 , các hình 1×1 sẽ ghép thành hai hình 1×2022 nằm ở phía bên phải và phía dưới hình 2022×2022 , và hình 1×1 là ô góc dưới bên phải của bảng 2023×2023 ban đầu)

Hiển nhiên 4 ô góc của bảng 2023×2023 phải có màu trắng, nên ô 1×1 ở cách chia trên phải có màu trắng.

Xét phần còn lại của bảng, giả sử số ô đen trong phần còn lại lớn hơn số ô trắng. Khi đó, tồn tại một hình $(1 \times 2$ hoặc $2 \times 2)$ trong cách chia trên có số ô đen nhiều hơn số ô trắng. Nếu như một hình 1×2 trong cách chia trên có số ô đen nhiều hơn ô trắng, thì hình đó phải chứa 2 ô đen, Điều này mâu thuẫn với đề bài do khi đó 2 ô đen trên chỉ có thể kề với tối đa 2 ô trắng mỗi ô.

Nếu như một hình 2×2 trong cách chia trên có số ô đen nhiều hơn ô trắng, thì hình đó phải chứa ít nhất 3 ô đen. Điều này mâu thuẫn với đề bài do khi đó trong 3 ô đen trên sẽ phải có 1 ô kề với 2 ô đen còn lại, do đó ô này chỉ có thể kề với tối đa 2 ô trắng.

Như vậy giả sử ban đầu là vô lý, suy ra trong phần còn lại của bảng thì số ô đen không thể nhiều hơn số ô trắng. Suy ra số ô đen tối đa là

$$\frac{2023^2 - 1}{2} = 2046264.$$

Một cách tô thỏa mãn con số trên sẽ là tô đen trắng xen kẽ theo kiểu bàn cờ. □