

Câu 1. (4,0 điểm) Cho biểu thức: $P = \left[\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} - \frac{1-2x^2+4x}{x^3-1} + \frac{1}{x-1} \right] : \frac{x^2+x}{x^3+x}$, với $x \neq 0, \pm 1$.

1. Rút gọn biểu thức P.

2. Tìm giá trị của x để $P = 1$.

Câu 2. (4,0 điểm)

1. Cho $a + b + c = 0$ và $abc \neq 0$. Chứng minh: $\frac{1}{b^2+c^2-a^2} + \frac{1}{a^2+c^2-b^2} + \frac{1}{a^2+b^2-c^2} = 0$.

2. Cho đa thức: $f(x) = 2x^4 + ax^2 + bx + c$. Xác định hệ số a; b; c biết $f(x)$ chia hết cho $x-2$ và $f(x)$ chia cho x^2-1 dư $2x$.

3. Bác Hoàng gửi vào ngân hàng 500 triệu đồng theo thể thức lãi kép theo định kì với lãi suất 5,5% mỗi năm (tức là nếu đến hạn người gửi không rút lãi ra thì tiền lãi được tính vào vốn kì kế tiếp). Tính số tiền bác Hoàng nhận được sau 3 năm là (cả gốc và lãi).

Câu 3. (4,0 điểm)

1. Tìm các số nguyên x; y thỏa mãn: $2x^2 + 4x + 2 = 3(7 - y^2)$.

2. Tìm tất cả số nguyên tố p; q; r thỏa mãn: $(p^2 + 1)(q^2 + 1) = r^2 + 1$.

Câu 4. (6,0 điểm) Cho hình vuông ABCD, trên cạnh AB lấy điểm M bất kỳ (không trùng với A, B). Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ B xuống MC.

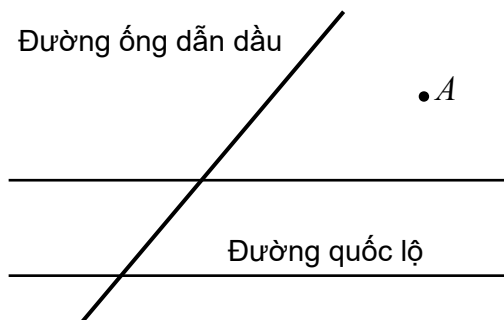
1. Chứng minh: $BH^2 = HM.HC$.

2. Đường thẳng qua D vuông góc với DM cắt đường thẳng BC tại K; đường thẳng qua D vuông góc với MK cắt BC tại E. Chứng minh: $\triangle KDM$ vuông cân và $\triangle DKE$ đồng dạng với $\triangle BKD$.

3. Trên cạnh BC lấy điểm N sao cho $BN = BM$. Chứng minh rằng: khi điểm M di chuyển trên cạnh AB thì góc DHN luôn có số đo không đổi.

Câu 5. (2,0 điểm)

1. Đường quốc lộ và đường ống dẫn dầu cắt nhau tạo thành một góc nhỏ hơn 45° , trong góc này có bãi đỗ xe ô tô ở vị trí A (hình vẽ). Cần phải xây trạm cung cấp xăng ở vị trí nào trên đường ống để các loại xe xuất phát từ bãi đỗ xe A đến cây xăng rồi ra đường quốc lộ với đường đi ngắn nhất.



2. Cho x, y, z là độ dài 3 cạnh của một tam giác.

Chứng minh rằng: $\frac{x}{3(y+z-x)} + \frac{y}{3(x+z-y)} + \frac{z}{3(x+y-z)} \geq 1$

-----HẾT-----

Họ tên thí sinh: Số báo danh:

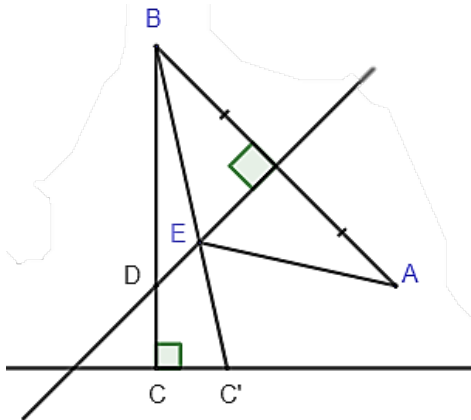
Giám thị số 1: Giám thị số 2:

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

HƯỚNG DẪN CHẤM THI

Câu		Đáp án	Điểm
1 (4,0đ)	1 (3,0đ)	Với $x \neq 0, \pm 1$ ta có:	
		$P = \left[\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} - \frac{1-2x^2+4x}{x^3-1} + \frac{1}{x-1} \right] : \frac{x^2+x}{x^3+x}$	0,5
		$P = \left[\frac{(x-1)^3}{(x^2+x+1)(x-1)} - \frac{1-2x^2+4x}{(x^2+x+1)(x-1)} + \frac{x^2+x+1}{(x^2+x+1)(x-1)} \right] : \frac{x(x+1)}{x(x^2+1)}$	0,5
		$P = \frac{x^3-3x^2+3x-1-1+2x^2-4x+x^2+x+1}{(x^2+x+1)(x-1)} : \frac{x+1}{x^2+1}$	0,5
		$P = \frac{x^3-1}{(x^2+x+1)(x-1)} \cdot \frac{x^2+1}{x+1} = \frac{x^2+1}{x+1}$	0,5
		$\text{Vậy } P = \frac{x^2+1}{x+1} \text{ với } x \neq 0, \pm 1$	0,5
	2 (1,0đ)	Đề $P = \frac{x^2+1}{x+1} = 1$ thì $x^2+1 = x+1$	0,25
		$\Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0$	0,25
		$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$	0,25
		Vì ĐKXĐ là $x \neq 0, \pm 1$ nên $x=0; x=1$ không thỏa mãn Vậy không tồn tại x để $P=1$	0,25
2 (4,0đ)	1 (2,0đ)	Ta có: $\frac{1}{b^2+c^2-a^2} + \frac{1}{a^2+c^2-b^2} + \frac{1}{a^2+b^2-c^2}$	0,5
		$= \frac{1}{(b+c)^2-2bc-a^2} + \frac{1}{(a+c)^2-2ac-b^2} + \frac{1}{(a+b)^2-2ab-c^2}$	0,5
		$= \frac{1}{(a+b+c)(b+c-a)-2bc} + \frac{1}{(a+b+c)(a+b-c)-2ac} + \frac{1}{(a+b+c)(a+b-c)-2ab}$	0,5
		$= \frac{1}{-2bc} + \frac{1}{-2ac} + \frac{1}{-2ab} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{a+b+c}{abc} = 0 \text{ (đpcm)}$	0,5
	2 (1,0đ)	Gọi thương của $f(x)$ cho $x-2$ là $P(x)$ mà $f(x)$ chia hết cho $x-2$ nên $f(2) = 2x^4 + ax^2 + bx + c = (x-2).P(2) = 0$ $\Rightarrow 32 + 4a + 2b + c = 0 \quad (1)$	0,25
		Gọi thương của $f(x)$ cho x^2-1 là $Q(x)$ mà $f(x)$ chia x^2-1 dư $2x$ nên $f(1) = 2x^4 + ax^2 + bx + c = (x-1)(x+1).Q(1) = 2$ và $f(-1) = 2x^4 + ax^2 + bx + c = (x-1)(x+1).Q(-1) = -2$ $\Rightarrow 2 + a + b + c = 2 \quad (2) \quad \text{và} \quad 2 + a - b + c = -2 \quad (3)$	0,25
		Lấy (2) + (3) ta được $4 + 2a + 2c = 0 \Rightarrow a + c = -2$ Thay $a + c = -2$ vào (2) ta được $b = 2$	0,25
	3 (1,0đ)	Lấy (1) - (2) ta được $30 + 3a + b = -2 \Rightarrow 3a = -34 \Rightarrow a = -\frac{34}{3} \Rightarrow c = \frac{28}{3}$ $\text{Vậy } a = -\frac{34}{3}; b = 2; c = \frac{28}{3}$	0,25
	3 (1,0đ)	Vì Bác Hoàng gửi theo thể thức lãi kép nên số tiền bác Hoàng nhận được sau 3 năm là: $500(5,5\% + 1)^3 = 587,1206875$ (triệu đồng) Đáp số: 587,1206875 triệu đồng	0,25 0,5 0,25

3 (4,0đ)	1 (2,0đ)	Ta có: $2x^2 + 4x + 2 = 3(7 - y^2) \Rightarrow 2(x + 1)^2 = 3(7 - y^2)$ Do $2(x + 1)^2 > 0$ nên $3(7 - y^2) > 0 \Rightarrow 7 - y^2 > 0 \Rightarrow y^2 < 7$ $\Rightarrow y^2 \in \{0; 1; 4\} \Rightarrow y \in \{-2; -1; 0; 1; 2\} \quad (y \in \mathbb{Z})$ Với $y = \pm 2$ thì x không tồn tại ($x \in \mathbb{Z}$) Với $y = \pm 1$ thì $(x + 1)^2 = 9 \Rightarrow x = 2; x = -4$ Với $y = 0$ thì x không tồn tại ($x \in \mathbb{Z}$) Vậy $(x; y)$ là $(2; 1); (2; -1); (-4; 1); (-4; -1)$	0,25 0,25 0,25 0,25 0,25
	2 (2,0đ)	Do $p; q; r$ là số nguyên tố nên $p; q; r \geq 2$ $\Rightarrow p^2 + 1 \geq 5; q^2 + 1 \geq 5; r^2 + 1 \geq 5$ $\Rightarrow (p^2 + 1)(q^2 + 1) \geq 25 \Rightarrow r^2 + 1 \geq 25 \Rightarrow r > 7$ mà r là số nguyên tố nên $r^2 + 1 \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow (p^2 + 1)(q^2 + 1) \equiv 2 \pmod{3}$ Do vai trò của p và q là như nhau nên không mất tính tổng quát giả sử $p^2 + 1 \equiv 1 \pmod{3}$ và $q^2 + 1 \equiv 2 \pmod{3}$ $\Rightarrow p = 3$ và $q^2 \equiv 1 \pmod{3}$. Khi đó ta có $10(q^2 + 1) = r^2 + 1$ Do $q \geq 2$ nên + Xét $q = 2 \Rightarrow r = 7$ + Xét $q > 2 \Rightarrow q^2 + 1 \equiv 2 \pmod{4} \Rightarrow 10(q^2 + 1) \equiv 0 \pmod{4}$ $\Rightarrow r^2 + 1 \equiv 0 \pmod{4}$ (vô lí) Vậy $(p; q; r)$ là $(3; 2; 7); (2; 3; 7)$	0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25
	1 (3,0đ)	(Học sinh vẽ hình tương đối đúng nếu học sinh không vẽ hình hoặc vẽ sai sẽ không chấm điểm) Hình 0, 25 điểm Xét $\triangle HBM$ và $\triangle HCB$ có: $\widehat{HMB} = \widehat{HBC}$ (cùng phụ $\widehat{HBC}$) $\Rightarrow \triangle HBM \sim \triangle HCB$ (g – g) $\Rightarrow \frac{HB}{HC} = \frac{HM}{HB} \Rightarrow HB^2 = HM.HC$	0,5 0,25 0,25 0,5 0,25 1,0
4 (6,0đ)	2 (2,0đ)	Xét $\triangle AMD$ vuông tại A và $\triangle CKD$ vuông tại C có: $AD = DC$ (hình vuông $ABCD$) $\widehat{ADM} = \widehat{CDK}$ (cùng phụ $\widehat{MDC}$) Do đó: $\triangle AMD = \triangle CKD$ (cạnh góc vuông – góc nhọn) $\Rightarrow DM = DK$ Xét $\triangle DMK$ có $\widehat{DMK} = 90^\circ$; $DM = DK$ nên $\triangle DMK$ vuông cân tại D (đpcm) Do DB là đường chéo của hình vuông $ABCD$ nên $\widehat{DBC} = 45^\circ$ Vì $\triangle DMK$ vuông cân tại D có đường cao DE nên DE vừa là đường cao vừa là đường phân giác của $\triangle MDK \Rightarrow \widehat{EDK} = 45^\circ$ Xét $\triangle DKE$ và $\triangle BKD$ có: $\widehat{EDK} = \widehat{DBK} = 45^\circ$ $\Rightarrow \triangle DKE \sim \triangle BKD$ (g – g) (đpcm)	0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25
	3 (1,0đ)	Chưa có dữ liệu	0,25 0,25 0,25 0,25

5 (2,0đ)	1 (1,0đ)	Ta thấy khu dân cư A và điểm lối thoát ra đường quốc lộ nằm cùng về một phía đường ống dẫn dầu. Gọi B là điểm đối xứng với A qua đường ống dẫn dầu. Từ B hạ đường vuông góc xuống đường quốc lộ, cắt đường ống dẫn dầu tại D và cắt đường quốc lộ tại C Vậy D chính là nơi ta xây trạm cung cấp xăng và đoạn đường $AD + DC$ là đoạn đường ngắn nhất nên ta phải mở. Thật vậy, gọi E là điểm bất kì trên đường ống dẫn dầu, C' là giao điểm của BE xuống đường quốc lộ. Ta có: $AE + EC' = BE + EC' \geq BC' \geq BC$ (Do BC là đoạn đường ngắn nhất từ B đến đường quốc lộ)		0,25 0,25 0,25 0,25
	2 (1,0đ)	Chưa có dữ liệu	0,25 0,25 0,25 0,25	