

Câu 1 (5,0 điểm).

a) Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{2(x-2\sqrt{x}+1)}{x-1} \right)$ với $x > 0, x \neq 1$.

b) Cho các số thực dương a, b, c, d thỏa mãn $a \geq c+d$ và $b \geq c+d$. Chứng minh rằng
 $ab \geq ad + bc$.

Câu 2 (5,0 điểm).

a) Tìm m để phương trình $(x-1)(x^2-2x+m)=0$ có 3 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 thỏa mãn

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{1}{3}.$$

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + \frac{1}{y^2} + x + \frac{1}{y} = 4 \\ x^3 + \frac{1}{y^3} + \frac{x}{y} \left(\frac{1}{y} + x \right) = 4 \end{cases}.$$

Câu 3 (5,0 điểm). Cho tam giác ABC cân tại A . Gọi D là trung điểm của đoạn thẳng AC . Phân giác trong của góc $\widehat{BAC}$ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD tại E (E thuộc miền trong tam giác ABC). Đường thẳng BD cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE tại $F \neq B$. Đường thẳng AF cắt BE tại I và CI cắt BD tại K .

a) Chứng minh rằng BI là tia phân giác của góc $\widehat{ABK}$.

b) Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh rằng tứ giác $AFMC$ nội tiếp đường tròn.

c) Chứng minh rằng $AD^2 = DK \cdot DB$.

Câu 4 (3,0 điểm).

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x - y = xy$.

b) Cho các số nguyên dương a, b, n không chia hết cho số nguyên tố lẻ p . Chứng minh rằng

$$A = (a-b)n^{\frac{p-1}{2}} + a + b \text{ không chia hết cho } p.$$

Câu 5 (2,0 điểm). Trên một tờ giấy A4 kích thước 210mm x 297mm, bạn An vẽ 30 đường tròn bán kính 1cm. Chứng minh rằng sau khi bạn An vẽ 30 đường tròn, bạn Bình luôn dựng được 5 hình vuông có độ dài các cạnh là 2cm mà không có điểm chung với bất kỳ đường tròn nào và hai hình vuông bất kỳ cũng không giao nhau.

-----Hết-----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay trong khi làm bài.

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.