

ĐỀ CHÍNH THỨC**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THCS THÀNH PHỐ LÀO CAI****NĂM HỌC 2024-2025****Môn: Toán****Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)****Ngày thi 03 tháng 12 năm 2024****(Đề thi gồm 06 câu, in trong 01 trang)****Câu 1 (5,0 điểm)**

1.1. Cho biểu thức:

$$A = \left(2 - \frac{2\sqrt{xy} + 1}{1 + \sqrt{xy}} + \frac{1 + \sqrt{xy} + 2\sqrt{x}}{1 - xy} \right) : \left(\frac{\sqrt{xy} - \sqrt{x}}{\sqrt{xy} + 1} - \frac{\sqrt{xy} + \sqrt{x}}{\sqrt{xy} - 1} \right) \quad (\text{với}$$

 $x > 0; y > 0; xy \neq 1), (2)$

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Cho $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = 12$, tìm giá trị lớn nhất của A .

1.2. Xét ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $\frac{c}{b} = \frac{\sqrt{c^2 + 1}}{b} - \frac{ac}{c + \sqrt{c^2 + 1}}$. Tính giá trị biểu thức

$$P = \frac{1}{\sqrt{ab} + a\sqrt{bc} + 1} + \frac{1}{\sqrt{bc} + \sqrt{b} + 1} + \frac{1}{\sqrt{ca} + \sqrt{c} + 1}$$

Câu 2 (2,0 điểm). Khởi động một giờ học, cô An cho lớp chơi trò chơi "Quay số nhận quà". Vòng quay số gồm 6 ô gắn các số tự nhiên từ 1 đến 6 (mỗi số gắn trên một ô). Người chơi được quay số 3 lần. Sau 3 lần quay, nếu kết quả nhận được có đủ các chữ số 3, 1, 2 thì sẽ được nhận quà. Hãy tính xác suất để người chơi được nhận quà.

Câu 3 (2,0 điểm). Bình khởi hành từ thành phố Lào Cai về huyện Bảo Thắng. Sau đó 5 phút, Minh và An khởi hành từ huyện Bảo Thắng về thành phố Lào Cai. Trên đường đi Bình gặp Minh rồi gặp An ở hai địa điểm cách nhau 6 km . Tính vận tốc mỗi người? Biết rằng thành phố Lào Cai cách huyện Bảo Thắng 33 km ; vận tốc của Bình gấp rưỡi vận tốc của An và bằng $\frac{2}{3}$ vận tốc của Minh.

Câu 4 (2,0 điểm)

4.1. Cho a, b là các số thực thỏa mãn $a + b + ab = 8$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2$.

4.2. Với $a, b, c > 0, 3bc - ac - ab = 1$, chứng minh rằng $a^3b^3c^3 + b^3 + c^3 \geq 3b^3c^3$.

Câu 5 (3,0 điểm)

5.1. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n > 3$ thì $A = n^3 - n^2 - n - 2$ không phải là số nguyên tố.

5.2. Cho x, y là các số nguyên thỏa mãn $xy(x - y) + 1$ chia hết cho 3 . Chứng minh $x + y$ chia hết cho 3 .

5.3. Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn phương trình:

$$6x^2 - xy - 2y^2 + 4x + 2y - 7 = 0.$$

Câu 6 (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn ($AB > AC$) nội tiếp đường tròn (O), có đường cao AH . Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Đường thẳng AI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là M . Kẻ đường kính AK của đường tròn (O). Đường thẳng MK cắt các đường thẳng AH và BC thứ tự tại P và Q . Gọi F là giao điểm của AM và BC.

a) Chứng minh: $FA.FM = FH.FQ$.

b) Chứng minh: $\triangle AKP$ cân;

c) Chứng minh: $MB^2 = MK.MQ$ và tứ giác QIHP nội tiếp.

d) Đường thẳng KI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là D . Hai đường thẳng AD và BC cắt nhau tại R . Gọi E là trung điểm của AR . Chứng minh ba điểm Q, I, E thẳng hàng.

-----Hết-----

GIẢI ĐỀ CHÍNH THỨC
KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THÀNH PHỐ LÀO CAI
NĂM HỌC 2024 - 2025

Môn: Toán

Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Ngày thi 03 tháng 12 năm 2024

(Đề thi gồm 06 câu, in trong 01 trang)

Câu 1 (5,0 điểm)

1.1. Cho biểu thức: $A = \left(2 - \frac{2\sqrt{xy} + 1}{1 + \sqrt{xy}} + \frac{1 + \sqrt{xy} + 2\sqrt{x}}{1 - xy} \right) : \left(\frac{\sqrt{xy} - \sqrt{x}}{\sqrt{xy} + 1} - \frac{\sqrt{xy} + \sqrt{x}}{\sqrt{xy} - 1} \right)$ (với

$x > 0; y > 0; xy \neq 1$), (2)

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Cho $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = 12$, tìm giá trị lớn nhất của A.

1.2. Xét ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $\frac{c}{b} = \frac{\sqrt{c^2 + 1}}{b} - \frac{ac}{c + \sqrt{c^2 + 1}}$. Tính giá trị biểu

$$\text{thức } P = \frac{1}{\sqrt{ab} + a\sqrt{bc} + 1} + \frac{1}{\sqrt{bc} + \sqrt{b} + 1} + \frac{1}{\sqrt{ca} + \sqrt{c} + 1}$$

Giải

1.1

a) Rút gọn A ;

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{2(1 - xy) - (2\sqrt{xy} + 1)(1 - \sqrt{xy}) + (1 + \sqrt{xy} + 2\sqrt{x})}{1 - xy} \right) : \left(\frac{(\sqrt{xy} - \sqrt{x})(\sqrt{xy} - 1) - (\sqrt{xy} + \sqrt{x})(\sqrt{xy} - 1)}{xy - 1} \right) \\ &= \frac{2(1 + \sqrt{x})}{1 - xy} : \frac{2\sqrt{xy}(1 + \sqrt{x})}{1 - xy} = \frac{1}{\sqrt{xy}} \end{aligned}$$

b) Ta có

$$12 = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \geq \frac{2}{\sqrt[4]{xy}} = 2 \cdot \sqrt{A}$$

$$\Rightarrow 6 \geq \sqrt{A} \Rightarrow 36 \geq A$$

A đạt GTLN = 36 khi $x = y = \frac{1}{36}$

1.2

$$\begin{aligned} \frac{c}{b} &= \frac{\sqrt{c^2 + 1}}{b} - \frac{ac}{c + \sqrt{c^2 + 1}} \\ \Rightarrow 0 &= \frac{\sqrt{c^2 + 1} - c}{b} - \frac{ac(-c + \sqrt{c^2 + 1})}{1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{c^2 + 1} - c \right) \left(\frac{1}{b} - ac \right) = 0$$

Do $\left(\sqrt{c^2 + 1} - c \right) > |c| - c \geq 0$ nên $\frac{1}{b} - ac = 0$ hay $abc = 1$

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{\sqrt{ab} + a\sqrt{bc} + 1} + \frac{1}{\sqrt{bc} + \sqrt{b} + 1} + \frac{1}{\sqrt{ca} + \sqrt{c} + 1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{ab} + \sqrt{a}\sqrt{abc} + 1} + \frac{1}{\sqrt{bc} + \sqrt{b} + 1} + \frac{1}{\sqrt{ca} + \sqrt{c} + 1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{ab} + \sqrt{a} + 1} + \frac{1}{\sqrt{bc} + \sqrt{b} + 1} + \frac{1}{\sqrt{ca} + \sqrt{c} + 1} \end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{a} = x; \sqrt{b} = y; \sqrt{c} = z$. Ta có $xyz = 1$. Ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{xy + x + 1} + \frac{1}{yz + y + 1} + \frac{1}{zx + z + 1} \\ &= \frac{1}{xy + x + 1} + \frac{x}{xyz + xy + x} + \frac{xy}{x^2yz + xyz + xy} = \frac{1}{xy + x + 1} + \frac{x}{1 + xy + x} + \frac{xy}{x + 1 + xy} = 1 \end{aligned}$$

Vậy $P=1$

Câu 2 (2,0 điểm). Khởi động một giờ học, cô An cho lớp chơi trò chơi "Quay số nhận quả". Vòng quay số gồm 6 ô gắn các số tự nhiên từ 1 đến 6 (mỗi số gắn trên một ô). Người chơi được quay số 3 lần. Sau 3 lần quay, nếu kết quả nhận được có đư các chữ số 3,1,2 thì sẽ được nhận quả. Hãy tính xác suất để người chơi được nhận quả.

Giải:

Không gian mẫu có $6.6.6 = 216$ phần tử

Khả năng thuận lợi: Ta cần xác suất để kết quả 3 lần quay có chứa các chữ số 3,1 và 12 (có thể xuất hiện theo bất kỳ thứ tự nào). Tức là, ta cần 3 lần quay cho ra chính xác ba số 3,1, và 2.

Số kết quả có thể có các số 3,1, và 2 (các số này xuất hiện 3 lần trong các ô quay, và mỗi lần quay có thể là 3,1, hoặc 2).

Các kết quả có thể xảy ra theo các thứ tự khác nhau của ba số này.

Vậy số kết quả mong muốn là số cách sắp xếp ba số 3,1 số khác nhau: và 2 trong 3 lần quay, tức là số hoán vị của 3 số khác nhau :

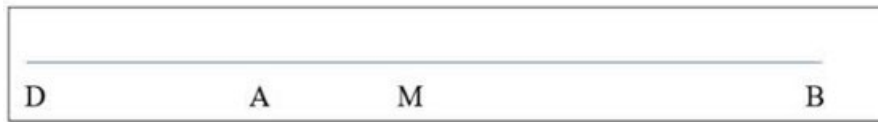
$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 12$$

$$\text{Do đó xác suất } P = \frac{1}{36}$$

Câu 3(2, 0 điểm). Bình khởi hành từ thành phố Lào Cai về huyện Bảo Thắng. Sau đó 5 phút, Minh và An khởi hành từ huyện Bảo Thắng về thành phố Lào Cai. Trên đường đi Bình gặp Minh rồi gặp An ở hai địa điểm cách nhau 6 km . Tính vận tốc mỗi người? Biết rằng thành phố Lào Cai cách huyện Bảo Thắng 33 km ; vận tốc của Bình gấp rưỡi vận tốc

của An và bằng $\frac{2}{3}$ vận tốc của Minh.

Giải:



Gọi Lào Cai là B, Bảo Thắng là D, vị trí gặp nhau của Minh và Bình là M, của Bình và An là A

Gọi vận tốc của Bình là x km / h, vận tốc của An là $\frac{2}{3}x$ km / h, vận tốc của Minh là $\frac{3x}{2}$ km / h,

Thời gian Bình đến M gặp Minh là y (h) ($y > 0$)

Ta có $DM = \frac{3}{2}x \left(y - \frac{1}{12} \right)$; $BM = xy$; $BM + DM = 33$ nên $20xy - x = 264$

$$DA = \frac{2}{3}x \left(y - \frac{1}{12} + \frac{6}{x} \right) = \frac{2}{3}xy - \frac{1}{18}x + 4$$

$$DM = \frac{3}{2}xy - \frac{1}{8}x$$

$$\text{Ta có } DA + 6 = DM \rightarrow \frac{2}{3}xy - \frac{1}{18}x + 4 + 6 = \frac{3}{2}xy - \frac{1}{8}x \rightarrow \frac{5}{6}xy - \frac{5}{72}x = 10$$

Từ (1) và (2) suy ra $xy = 15$; $x = 36$

Do đó vận tốc của Bình là 36 km / h; vận tốc của An là 24 km / h, vận tốc của Minh là 54 km / h

Câu 4 (2,0 điểm)

4.1. Cho a, b là các số thực thỏa mãn $a + b + ab = 8$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2$.

4.2. Với $a, b, c > 0$, $3bc - ac - ab = 1$. Chứng minh rằng $a^3b^3c^3 + b^3 + c^3 \geq 3b^3c^3$.

Giải

4.1

$$\left. \begin{array}{l} 2(a^2 + b^2) \geq 4ab \\ a^2 + 4 \geq 4a \\ b^2 + 4 \geq 4b \end{array} \right\} \Rightarrow 3P + 8 \geq 4(ab + a + b) = 4.8 \rightarrow P \geq 8.$$

Dấu bằng khi $a = b = 2$

Cách 2:

$$\text{Giả thiết} \Rightarrow P + 2\sqrt{2}\sqrt{P} - 16 \geq 0 \Rightarrow (\sqrt{P} - \sqrt{8})(\sqrt{P} + 4\sqrt{2}) \geq 0 \Rightarrow P \geq 8$$

Dấu bằng khi $a = b = 2$

$$4.2 \text{ Giả thiết cho } 3bc - ac - ab = 1 \Leftrightarrow ac + ab + 1 = 3bc \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{1}{bc} = 3.$$

Đặt $\frac{1}{b} = x, \frac{1}{c} = y$, ta có $ax + ay + xy = 3$

$$\Rightarrow (a + x + y)^2 \geq 3(ax + ay + xy) = 9 \Rightarrow a + x + y \geq 3$$

Lại có $a^3 + x^3 + y^3 = (a^3 + 2) + (x^3 + 2) + (y^3 + 2) - 6 \geq 3(a + x + y) - 6 \geq 3$

$$\Rightarrow a^3 + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \geq 3 \text{ hay } a^3 b^3 c^3 + b^3 + c^3 \geq 3b^3 c^3$$

Cách 2:

Có $3bc = ac - ab - 1 \Leftrightarrow 3 = ad + ae + de, d = \frac{1}{b}, e = \frac{1}{c}$

Cần chứng minh: $a^3 + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{b^3} \geq 3$

Tương đương với $a^3 + d^3 + e^3 \geq 3$

Ta có $3 \leq \frac{a^3 + d^3 + 1}{3} + \frac{a^3 + e^3 + 1}{3} + \frac{d^3 + e^3 + 1}{3} \rightarrow a^3 + d^3 + e^3 \geq 3$.

Suy ra điều phải chứng minh

Câu 5(3, 0 điểm)

5.1. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n > 3$ thì $A = n^3 - n^2 - n - 2$ không phải là số nguyên tố.

5.2. Cho x, y là các số nguyên thỏa mãn $xy(x - y) + 1$ chia hết cho 3. Chứng minh $x + y$ chia hết cho 3.

5.3. Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn phương trình:

$$6x^2 - xy - 2y^2 + 4x + 2y - 7 = 0.$$

Giải

5.1 Ta có $A = n^3 - n^2 - n - 2 = (n - 2)(n^2 + n + 1)$

Mà $n > 3$ nên $n - 2 > 1$ và $n^2 + n + 1 > 1 \Rightarrow A$ là hợp số

5.2 Do $xy(x - y) + 1 \vdots 3$ nên $xy(x - y) \div 3 \Rightarrow \begin{cases} x \not\equiv 0 \pmod{3} \\ y \not\equiv 0 \pmod{3} \\ x \not\equiv y \pmod{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 1 \pmod{3} \\ y \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 2 \pmod{3} \\ y \equiv 1 \pmod{3} \end{cases}$

$$\Rightarrow x + y \vdots 3$$

5.3 Ta có

$$6x^2 - xy - 2y^2 + 4x + 2y - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x + y)(3x - 2y) + 2(2x + y) - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x + y)(3x - 2y + 2) = 7$$

$2x + y$	1	y	-1	-7
$3x - 2y + 2$	y	1	-7	-1
x	1	$13/7$	$-11/7$	$-17/7$
y	-1	$23/7$	$15/7$	$-15/7$
	Tm	(loại)	(loại)	(loại)

Vậy $(x, y) = (1; -1)$ là nghiệm duy nhất

Cách 2:

$$6x^2 + (-y + 4)x - 2y^2 + 2y - 7 = 0$$

$$\Delta = (-y + 4)^2 - 24(-2y^2 + 2y - 7) = 49y^2 - 56y + 184 = (7y - 4)^2 + 168$$

Để phương trình có nghiệm nguyên thì Δ là số chính phương tồn tại số tự nhiên z mà :

$$\Delta = z^2 \Rightarrow z^2 - (7y - 4)^2 = 168 \Leftrightarrow (z + 7y - 4)(z - 7y + 4) = 168; z > |7y - 4|$$

Do $z + 7y - 4$ và $z - 7y + 4$ cùng tính chẵn lẻ.

Nên ta xét các trường hợp $2 \times 84; 4 \times 42$

ta có $x = 1, y = -1$ là nghiệm duy nhất

Câu 6 (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn ($AB > AC$) nội tiếp đường tròn (O), có đường cao AH .

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Đường thẳng AI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là M .

Kẻ đường kính AK của đường tròn (O). Đường thẳng MK cắt các đường thẳng AH và BC thứ tự tại P và Q. Gọi F là giao điểm của AM và BC.

a) Chứng minh: $FA \cdot FM = FH \cdot FQ$.

b) Chứng minh: $\triangle AKP$ cân;

c) Chứng minh: $MB^2 = MK \cdot MQ$ và tứ giác QIHP nội tiếp.

d) Đường thẳng KI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là D . Hai đường thẳng AD và BC cắt nhau tại R . Gọi E là trung điểm của AR . Chứng minh ba điểm Q, I, E thẳng hàng.

Giải

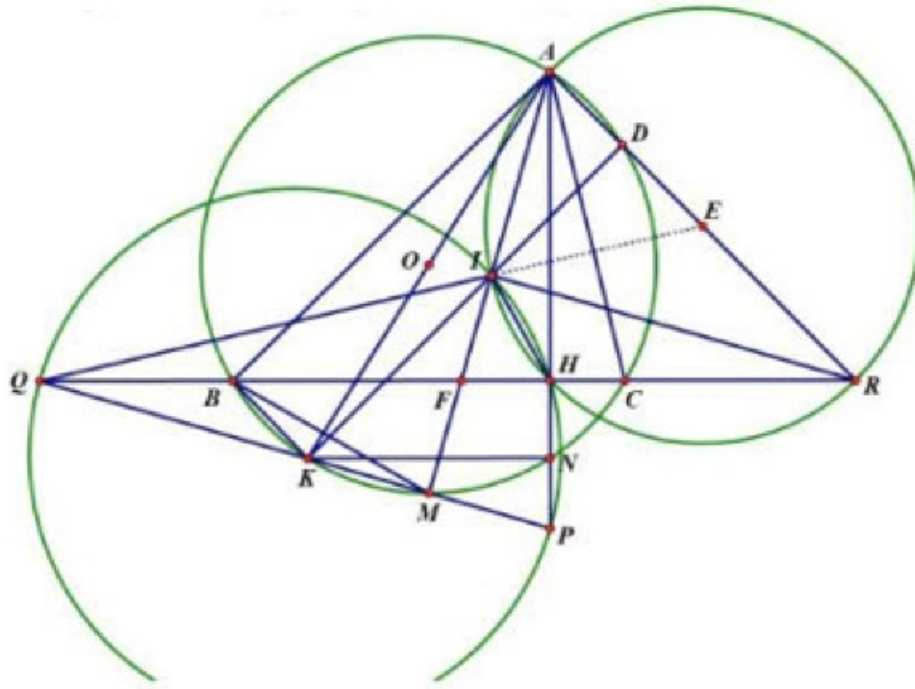
$$\begin{aligned} \text{a) Do } \widehat{AHQ} &= \widehat{AMQ} \text{ nên } AHMQ \text{ nội tiếp } \Rightarrow \widehat{FAH} = \widehat{FQM} \Rightarrow \triangle FAH \sim \triangle FQM \\ \Rightarrow \frac{FA}{FH} &= \frac{FQ}{FM} \Rightarrow FA \cdot FM = FH \cdot FQ. \end{aligned}$$

b) Gọi: $N = AH \cap (O) \Rightarrow KN \parallel BC$ (vì KN, BC cùng $\perp AH$)

$\Rightarrow BK = CN$ mà M là điểm chính giữa cung BC nên $MB = MC$

$$\Rightarrow MK = MN \Rightarrow \widehat{MAP} = \widehat{MKN} = \widehat{MNC} = \widehat{MAK}$$

mà $AM \perp KP \Rightarrow \triangle AKP$ cân tại A.



$$c) \widehat{KBM} = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{KM} = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{MN} = \widehat{MAN} = \widehat{MQB}$$

$\Rightarrow MB$ là tiếp tuyến của đường tròn (QBK) $\Rightarrow MB^2 = MK \cdot MQ$

*Ta có tính chất quen thuộc: $MI = MB$

Theo trên: $MI^2 = MP^2 = MK \cdot MQ = MP \cdot MQ$

$\Rightarrow \widehat{QIP} = 90^\circ$ mà $\widehat{QHP} = 90^\circ \Rightarrow QIHP$ nội tiếp

d) Ta có $\widehat{AR} = 90^\circ - \widehat{AID} = 90^\circ - \widehat{KIM} = 90^\circ - \widehat{PIM}$
 $= \widehat{IPQ} = \widehat{IHQ}$

$\Rightarrow AIHR$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AIR} = \widehat{AHR} = 90^\circ$

Ta có $\widehat{AIE} = \widehat{DAI} = \widehat{IKM} = \widehat{IPQ} = \widehat{QIM}$

$\Rightarrow Q, I, E$ thẳng hàng

Xem thêm: **ĐỀ THI HSG TOÁN 9**
<https://thcs.toanmath.com/de-thi-hsg-toan-9>