

Câu 1(2,0 điểm).

Cho số thực $3 < x \neq 4$ và biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} + \frac{x-5\sqrt{x}-9}{x-\sqrt{x}-2} \right) : \frac{\sqrt{x}-3}{2x}$.

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A.

Câu 2(1,0 điểm).

Cho góc nhọn α thỏa mãn $\tan \alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Hãy tính giá trị biểu thức $B = \frac{\cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha (\cos^2 \alpha + 1)}{2 \cos^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \frac{3}{5} \sin^2 \alpha}$.

Câu 3(1,0 điểm).

Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $2x^2 + 4xy + 4y^2 = xy^2 + 18x + 16y - 39$

Câu 4(1,0 điểm).

Cho số k thỏa mãn $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{2019.2020} = k \cdot \left(\frac{1}{1011} + \frac{1}{1012} + \frac{1}{1013} + \dots + \frac{1}{2020} \right)$

Chứng minh rằng: $k \in \mathbb{N}$.

Câu 5(1,0 điểm).

Giải phương trình $\sqrt{1926-x} + \sqrt{1954-x} + \sqrt{1971-x} = 23$.

Câu 6(1,0 điểm).

Cho tam giác ABC nhọn với trực tâm H. Trên đoạn HB lấy M và trên đoạn HC lấy N sao cho $\widehat{AMC} = \widehat{ANB} = 90^\circ$. Chứng minh rằng $AM = AN$.

Câu 7(1,0 điểm).

Cho tam giác ABC nhọn. Gọi D là trung điểm của BC; E là điểm bất kỳ trên cạnh AC. Gọi M là giao điểm của AD với BE. Kẻ đường thẳng CM cắt AB tại F.

Chứng minh rằng hai đường thẳng EF và BC song song với nhau.

Câu 8(1,0 điểm).

Cho a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác bất kỳ.

Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$.

Câu 9(1,0 điểm).

Trong hình vuông cạnh bằng 18 cho 1945 điểm. Chứng minh rằng luôn tồn tại một đường tròn bán kính 1 chứa ít nhất 7 điểm trong số 1945 điểm đã cho.

-----Hết-----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm!
Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

I) Hướng dẫn chung:

1) Hướng dẫn chấm chỉ nêu một cách giải với những ý cơ bản, nếu thí sinh làm bài không theo cách nêu trong hướng dẫn chấm nhưng vẫn đúng thì cho đủ số điểm từng phần như thang điểm quy định.

2) Việc chi tiết hoá thang điểm (nếu có) trong hướng dẫn chấm phải đảm bảo không làm sai lệch hướng dẫn chấm và phải được thống nhất thực hiện với tất cả giám khảo.

3) Điểm toàn bài tính đến **0,25** điểm. Sau khi cộng điểm toàn bài, **giữ nguyên kết quả**.

4) Với bài hình học nếu học sinh **không vẽ hình** phần nào thì **không** cho điểm phần đó.

II) Đáp án và thang điểm:

Câu 1 (2,0 điểm).

Cho số thực x thoả mãn $3 < x \neq 4$ và biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} + \frac{x-5\sqrt{x}-9}{x-\sqrt{x}-2} \right) : \frac{\sqrt{x}-3}{2x}$.

a) Rút gọn biểu thức A.

Nội dung trình bày	Điểm
Với $3 < x \neq 4$ thì $A = \frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}+1) - (\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2) + (x-5\sqrt{x}-9)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{2x}{\sqrt{x}-3}$	0,5
$= \frac{x+4\sqrt{x}+3 - (x-4) + x-5\sqrt{x}-9}{x-\sqrt{x}-2} \cdot \frac{2x}{\sqrt{x}-3}$	
$= \frac{x-\sqrt{x}-2}{x-\sqrt{x}-2} \cdot \frac{2x}{\sqrt{x}-3} = \frac{2x}{\sqrt{x}-3}$	0,5
Vậy, với $3 < x \neq 4$ thì $A = \frac{2x}{\sqrt{x}-3}$.	
Nếu học sinh không nhắc lại điều kiện trước khi rút gọn thì trừ 0,25 điểm.	

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A.

Nội dung trình bày	Điểm
Với $3 < x \neq 4$ thì $A = \frac{2x}{\sqrt{x}-3} = 2\sqrt{x-3} + \frac{6}{\sqrt{x}-3} \geq 2\sqrt{2\sqrt{x-3} \cdot \frac{6}{\sqrt{x}-3}} = 4\sqrt{3}$.	0,5
Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $2\sqrt{x-3} = \frac{6}{\sqrt{x}-3} \Leftrightarrow (\sqrt{x-3})^2 = 3 \Leftrightarrow x = 6$ (TM).	0,5
Vậy, biểu thức A đạt giá trị nhỏ nhất bằng $4\sqrt{3}$ khi và chỉ khi $x = 6$.	

Câu 2 (1,0 điểm). Cho góc nhọn α thoả mãn $\tan \alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Hãy tính giá trị biểu thức: $B = \frac{\cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cdot (\cos^2 \alpha + 1)}{2 \cdot \cos^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha - \frac{3}{5} \sin^2 \alpha}$.

Nội dung trình bày	Điểm
Vì α là góc nhọn nên $\cos \alpha > 0$	0,25
Do đó: $B = \frac{\cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{2 \cdot \cos^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha - \frac{3}{5} \sin^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha \cdot (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + \sin^2 \alpha}{2 \cos^2 \alpha \cdot (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) - \frac{3}{5} \sin^2 \alpha}$	0,25
$B = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{2 \cos^2 \alpha - \frac{3}{5} \sin^2 \alpha} = \frac{1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{2 - \frac{3}{5} \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{1 + \tan^2 \alpha}{2 - \frac{3}{5} \cdot \tan^2 \alpha}$	0,25
Thay $\tan \alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}$, ta được $B = \frac{1 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}{2 - \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{1 + \frac{4}{3}}{2 - \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{3}} = \frac{\left(\frac{7}{3}\right)}{\left(\frac{6}{5}\right)} = \frac{35}{18}$.	0,25

Câu 3(1,0 điểm).

Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn: $2x^2 + 4xy + 4y^2 = xy^2 + 18x + 16y - 39$

Nội dung trình bày	Điểm
Ta có: $2x^2 + 4xy + 4y^2 = xy^2 + 18x + 16y - 39 \Leftrightarrow (xy^2 - 4y^2) - (2x^2 - 8x) + (10x - 40) - (4xy - 16y) + 1 = 0$ $\Leftrightarrow (x - 4)y^2 - 2x(x - 4) + 10(x - 4) - 4y(x - 4) + 1 = 0$	0,25
Nếu $x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$ thì dẫn đến $1 = 0$ (vô lý). Vậy loại $x = 4$.	0,25
Nếu $x - 4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 4$ thì ta được $y^2 - 4y - 2x + 10 = -\frac{1}{x - 4}$.	0,25
Vì $y^2 - 4y - 2x + 10 \in \mathbb{Z}$ nên $\frac{1}{x - 4} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 3; x = 5$.	
Với $x = 3$ thì $y = 1; y = 3$. Với $x = 5$ thì $y = 2 \pm \sqrt{3} \notin \mathbb{Z}$. Vậy các cặp số $(x; y)$ cần tìm là $(3; 1), (3; 3)$.	0,25

Câu 4(1,0 điểm).

Cho số k thỏa mãn $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{2019.2020} = k \cdot \left(\frac{1}{1011} + \frac{1}{1012} + \frac{1}{1013} + \dots + \frac{1}{2020} \right)$.

Chứng minh rằng: $k \in \mathbb{N}$.

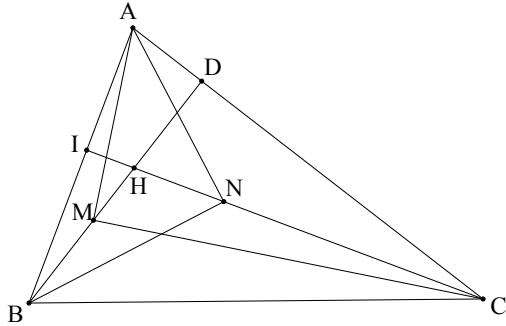
Nội dung trình bày	Điểm
Ta có: $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{2019.2020} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2019} - \frac{1}{2020}$	0,25

$= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2019}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2020}\right)$ $= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2019}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2020}\right) - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2020}\right)$ $= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2020} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1010}\right)$ $= \frac{1}{1011} + \frac{1}{1012} + \dots + \frac{1}{1013} + \dots + \frac{1}{2020}$	0,5
Từ đó suy ra $k=1$. Vậy $k \in \mathbb{N}$.	0,25

Câu 5 (1,0 điểm). Giải phương trình $\sqrt{1926-x} + \sqrt{1954-x} + \sqrt{1971-x} = 23$.

Nội dung trình bày	Điểm
Điều kiện xác định $x \leq 1926$ Khi đó, phương trình đã cho tương đương với $(\sqrt{1926-x}-6) + (\sqrt{1954-x}-8) + (\sqrt{1971-x}-9) = 0$	0,25
$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{1926-x}^2 - 6^2}{\sqrt{1926-x} + 6} + \frac{\sqrt{1954-x}^2 - 8^2}{\sqrt{1954-x} + 8} + \frac{\sqrt{1971-x}^2 - 9^2}{\sqrt{1971-x} + 9} = 0$	0,25
$\Leftrightarrow (1890-x) \left(\frac{1}{\sqrt{1926-x}+6} + \frac{1}{\sqrt{1954-x}+8} + \frac{1}{\sqrt{1971-x}+9} \right) = 0$ $\Leftrightarrow (1890-x) = 0 \quad (\text{Vì } \frac{1}{\sqrt{1926-x}+6} + \frac{1}{\sqrt{1954-x}+8} + \frac{1}{\sqrt{1971-x}+9} > 0)$	0,25
$\Leftrightarrow x = 1890$ (thỏa mãn). Vậy $x = 1890$.	0,25

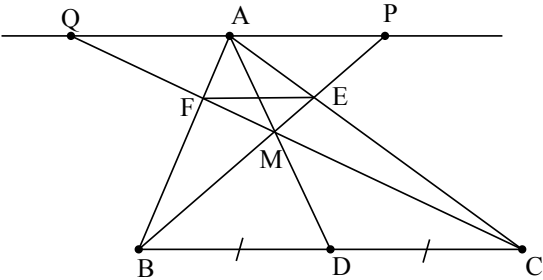
Câu 6 (1,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn với trực tâm H. Trên đoạn HB lấy M và trên đoạn HC lấy N sao cho $\widehat{AMC} = \widehat{ANB} = 90^\circ$. Chứng minh $AM = AN$.

Nội dung trình bày	Điểm
	
Gọi hai đường cao của tam giác ABC là BD và CI. Xét tam giác AMC vuông tại M với đường cao MD và tam giác ANB vuông tại N với đường cao NI, ta có: $AM^2 = AD \cdot AC$; $AN^2 = AI \cdot AB$.	0,5
Xét tam giác ABD vuông tại D và tam giác ACI vuông tại I có $\widehat{BAD} = \widehat{CAI}$ nên $\triangle ABD \sim \triangle ACI$, do đó $AD \cdot AC = AI \cdot AB \Rightarrow AM^2 = AN^2 \Rightarrow AM = AN$ (đpcm).	0,5

Câu 7 (1,0 điểm).

Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn. Gọi D là trung điểm của BC; E là điểm bất kỳ trên cạnh AC. Gọi M là giao điểm của AD với BE. Kẻ đường thẳng CM cắt AB tại F.

Chứng minh rằng: Hai đường thẳng EF và BC song song với nhau.

Nội dung trình bày	Điểm
	
Qua điểm A, kẻ đường thẳng song song với BC và cắt các đường thẳng BM, CM lần lượt tại P, Q. Khi đó, áp dụng định lý Ta-lét ta có: $\frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = \frac{AP}{AQ} \cdot \frac{BC}{AP} \cdot \frac{AQ}{BC} = 1$ (*)	0,5
Mà $BD = CD$ nên $\frac{EA}{EC} = \frac{FA}{FB}$	0,25
Vậy: EF và BC song song với nhau	0,25
Lưu ý: Học sinh dùng định lý Ce-va để chứng minh (*), nếu đúng vẫn cho điểm tối đa.	

Câu 8 (1,0 điểm).

Cho a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác bất kỳ.

Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$.

Nội dung trình bày	Điểm
Vì a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác nên $b+c-a > 0$; $c+a-b > 0$; $a+b-c > 0$ Đặt $x = b+c-a$; $y = c+a-b$; $z = a+b-c$ thì x, y, z là các số dương và $a = \frac{y+z}{2}$; $b = \frac{z+x}{2}$; $c = \frac{x+y}{2}$.	0,25
Khi đó: $\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} = \frac{y+z}{2x} + \frac{z+x}{2y} + \frac{x+y}{2z}$	0,25
$= \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} \right) \geq 3$	0,25
Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z \Leftrightarrow a = b = c$	0,25

Câu 9 (1,0 điểm). Trong hình vuông cạnh bằng 18 cho 1945 điểm. Chứng minh rằng luôn tồn tại một đường tròn bán kính 1 chứa ít nhất 7 điểm trong số 1945 điểm đã cho.

Nội dung trình bày	Điểm
Ta phân chia hình vuông đã cho thành $18^2 = 324$ hình vuông đơn vị (có cạnh bằng 1).	0,25
Vì có 1945 điểm và 324 hình vuông đơn vị nên tồn tại 1 hình vuông đơn vị chứa ít nhất $\left\lceil \frac{1945}{324} \right\rceil + 1 = 7$ điểm trong số các điểm đã cho.	0,5
Đường tròn ngoại tiếp hình vuông đơn vị có bán kính bằng $\frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ chứa ít nhất 7 điểm	0,25

nói trên. Từ đó suy ra bài toán được chứng minh.	
--	--

Hết.