

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỲ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP THÀNH PHỐ
HÀ NỘI

Năm học 2019 – 2020

Môn thi: TOÁN

ĐỀ CHÍNH THỨC

Ngày thi: 08 tháng 01 năm 2020

Thời gian làm bài: 150 phút

(Đề thi có 01 trang)

Bài I (5,0 điểm)

- 1) Giải phương trình $(4x + 2)\sqrt{x^2 + 2x + 5} = (x^2 + 2x + 2)\sqrt{4x + 5}$
- 2) Cho bốn số thực dương a, b, c, d thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3 = 3d^3$, $b^5 + c^5 + d^5 = 3a^5$ và $c^7 + d^7 + a^7 = 3b^7$. Chứng minh rằng $a = b = c = d$.

Bài II (5,0 điểm)

- 1) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $n^2 + 3n + 11$ không chia hết cho 49.
- 2) Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương $(x; y; p)$ với p là số nguyên tố thỏa mãn:
$$x^2 + p^2 y^2 = 6(x + 2p).$$

Bài III (3,0 điểm)

- 1) Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $5(x - y)^2 \leq (x^2 + y^2)$. Chứng minh $\frac{1}{2} \leq \frac{x}{y} \leq 2$.
- 2) Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $5(x + y + z)^2 \geq 14(x^2 + y^2 + z^2)$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{2x + z}{x + 2z}$.

Bài IV (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < BC$), ngoại tiếp đường tròn tâm I . Hình chiếu của điểm I lên các cạnh AB, AC theo thứ tự là M, N và hình chiếu của B lên cạnh AC là Q . Gọi D là điểm đối xứng của A qua Q , P là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BCD và R là giao điểm của hai đường thẳng MN, BQ .

- 1) Chứng minh các tam giác BMR và BIP đồng dạng.
- 2) Chứng minh đường thẳng PR song song với đường thẳng AC .
- 3) Chứng minh đường thẳng MN đi qua trung điểm của đoạn thẳng AP .

Bài V (1,0 điểm)

Có 15 hộp rỗng. Mỗi bước, người ta chọn một số hộp rồi bỏ vào mỗi hộp một số viên bi sao cho số viên bi bỏ vào mỗi hộp là một lũy thừa của 2 và trong mỗi bước không có hai hộp nào có số bi được bỏ vào giống nhau. Tìm số nguyên dương k nhỏ nhất sao cho sau khi thực hiện k bước tất cả các hộp đều có số bi giống nhau.

-----HẾT-----

LỜI GIẢI ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN 9 THÀNH PHỐ HÀ NỘI 2020

Võ Quốc Bá Cẩn

1. Đề thi

Bài 1 (5.0 điểm).

a) Giải phương trình:

$$(4x + 2)\sqrt{x^2 + 2x + 5} = (x^2 + 2x + 2)\sqrt{4x + 5}.$$

b) Cho bốn số thực dương a, b, c, d thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3 = 3d^3$, $b^5 + c^5 + d^5 = 3a^5$ và $c^7 + d^7 + a^7 = 3b^7$. Chứng minh rằng $a = b = c = d$.

Bài 2 (5.0 điểm).

a) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $n^2 + 3n + 11$ không chia hết cho 49.

b) Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương (x, y, p) với p là số nguyên tố thỏa mãn

$$x^2 + p^2y^2 = 6(x + 2p).$$

Bài 3 (3.0 điểm).

a) Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $5(x - y)^2 \leq x^2 + y^2$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2} \leq \frac{x}{y} \leq 2.$$

b) Cho ba số thực dương x, y, z thay đổi thỏa mãn điều kiện $5(x + y + z)^2 \geq 14(x^2 + y^2 + z^2)$.
Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{2x + z}{x + 2z}.$$

Bài 4 (6.0 điểm). Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $AB < BC$, ngoại tiếp đường tròn tâm I . Hình chiếu vuông góc của điểm I trên các cạnh AB, AC theo thứ tự là M, N và hình chiếu vuông góc của điểm B trên cạnh AC là Q . Gọi D là điểm đối xứng của điểm A qua điểm Q , P là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BCD và R là giao điểm của hai đường thẳng MN, BQ . Chứng minh rằng

a) Các tam giác BMR và BIP đồng dạng.

b) Đường thẳng PR song song với đường thẳng AC .

c) Đường thẳng MN đi qua trung điểm của đoạn thẳng AP .

Bài 5 (1.0 điểm). Có 15 hộp rỗng. Mỗi bước, người ta chọn một số hộp rồi bỏ vào mỗi hộp một số viên bi sao cho số viên bi bỏ vào mỗi hộp là một lũy thừa của 2 và trong mỗi bước không có hai hộp nào có số bi được bỏ vào giống nhau. Tìm số nguyên dương k nhỏ nhất sao cho sau khi thực hiện k bước, tất cả các hộp đều có số bi giống nhau.

2. Lời giải và bình luận các bài toán

Bài 1 (5.0 điểm).

a) Giải phương trình:

$$(4x + 2)\sqrt{x^2 + 2x + 5} = (x^2 + 2x + 2)\sqrt{4x + 5}.$$

b) Cho bốn số thực dương a, b, c, d thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3 = 3d^3$, $b^5 + c^5 + d^5 = 3a^5$ và $c^7 + d^7 + a^7 = 3b^7$. Chứng minh rằng $a = b = c = d$.

Lời giải. a) Điều kiện: $x \geq -\frac{5}{4}$. Đặt $a = \sqrt{4x + 5}$ và $b = \sqrt{x^2 + 2x + 5}$ ($a, b \geq 0$). Ta có

$$4x + 2 = a^2 - 3, \quad x^2 + 2x + 2 = b^2 - 3.$$

Phương trình đã cho có thể được viết lại thành $(a^2 - 3)b = (b^2 - 3)a$, hay

$$(a - b)(ab + 3) = 0.$$

Do $ab + 3 > 0$ nên từ đây, ta có $a = b$ hay

$$x^2 + 2x + 5 = 4x + 2.$$

Giải phương trình này, ta được $x \in \{0, 2\}$. Thử lại, ta thấy thỏa mãn. Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S = \{0, 2\}$.

b) Trong ba số b, d, a có một số hoặc là số lớn nhất, hoặc là số nhỏ nhất trong bốn số đã cho. Xét các trường hợp sau.

• **Trường hợp 1: b là số lớn nhất hoặc là số nhỏ nhất trong a, b, c, d .**

○ Nếu b là số lớn nhất trong a, b, c, d thì ta có $c^7, d^7, a^7 \leq b^7$ nên

$$c^7 + d^7 + a^7 \leq b^7 + b^7 + b^7 = 3b^7.$$

Mặt khác, theo giả thiết thì dấu đẳng thức phải xảy ra. Do đó $c = d = a = b$.

○ Nếu b là số nhỏ nhất trong a, b, c, d thì ta có $c^7, d^7, a^7 \geq b^7$ nên

$$c^7 + d^7 + a^7 \geq b^7 + b^7 + b^7 = 3b^7.$$

Mặt khác, theo giả thiết thì dấu đẳng thức phải xảy ra. Do đó $c = d = a = b$.

• **Trường hợp 2: d là số lớn nhất hoặc là số nhỏ nhất trong a, b, c, d .** Chứng minh tương tự như trường hợp trên, ta cũng có $a = b = c = d$.

• **Trường hợp 3: a là số lớn nhất hoặc là số nhỏ nhất trong a, b, c, d .** Chứng minh tương tự trường hợp 1, ta cũng có $a = b = c = d$.

Vậy, trong mọi trường hợp, ta luôn có $a = b = c = d$. □

Bài 2 (5.0 điểm).

- a) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $n^2 + 3n + 11$ không chia hết cho 49.
 b) Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương (x, y, p) với p là số nguyên tố thỏa mãn

$$x^2 + p^2 y^2 = 6(x + 2p).$$

Lời giải. a) Giả sử tồn tại số tự nhiên n sao cho $n^2 + 3n + 11$ chia hết cho 49. Khi đó, ta có $4(n^2 + 3n + 11) = (2n + 3)^2 + 35$ chia hết cho 49. (1)

Mà 35 và 49 cùng chia hết cho 7 nên ta có $(2n + 3)^2$ chia hết cho 7. Suy ra $2n + 3$ chia hết cho 7. Từ đó $(2n + 3)^2$ chia hết cho 49. Kết hợp với (1), ta được 35 chia hết cho 49, mâu thuẫn. Vậy, với mọi số tự nhiên n thì $n^2 + 3n + 11$ không chia hết cho 49.

b) Do $6(x + 2p)$ chia hết cho 3 nên từ phương trình đã cho, ta suy ra $x^2 + p^2 y^2$ chia hết cho 3. Mặt khác, ta có để ý rằng, với mọi số nguyên a thì a^2 chia 3 dư 0 hoặc 1. Do đó, để $x^2 + p^2 y^2$ chia hết cho 3 thì ta phải có x^2 và $p^2 y^2$ cùng chia hết cho 3. Suy ra x và py cùng chia hết cho 3.

Đặt $x = 3a$ với a nguyên dương. Phương trình đã cho có thể được viết lại thành

$$9a^2 + p^2 y^2 = 18a + 12p. \quad (1)$$

Do $9a^2$, $p^2 y^2$ và $18a$ chia hết cho 9 nên từ phương trình trên, ta suy ra $12p$ chia hết cho 9, tức p chia hết cho 3. Mà p là số nguyên tố nên $p = 3$. Khi đó, phương trình (1) có thể viết lại thành

$$a^2 + y^2 = 2a + 4,$$

hay

$$(a - 1)^2 + y^2 = 5. \quad (2)$$

Vì $(a - 1)^2 \geq 0$ nên từ phương trình trên, ta suy ra $y^2 \leq 5$. Do y là số nguyên dương nên ta có $y \in \{1, 2\}$. Bằng phép thử trực tiếp, ta tìm được các cặp số nguyên dương (a, y) thỏa mãn phương trình (2) là $(3, 1)$ và $(2, 2)$. Từ đó suy ra, có hai bộ số (x, y, p) thỏa mãn yêu cầu đề bài là $(9, 1, 3)$ và $(6, 2, 3)$. $\square$

Bài 3 (3.0 điểm).

- a) Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $5(x - y)^2 \leq x^2 + y^2$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2} \leq \frac{x}{y} \leq 2.$$

- b) Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $5(x + y + z)^2 \geq 14(x^2 + y^2 + z^2)$.
 Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{2x + z}{x + 2z}.$$

Lời giải. a) Giả thiết đã cho có thể được viết lại thành $2(x - 2y)(2x - y) \leq 0$, hay

$$\left(\frac{x}{y} - 2\right)\left(\frac{2x}{y} - 1\right) \leq 0.$$

Từ đó, ta có

$$\frac{1}{2} \leq \frac{x}{y} \leq 2.$$

b) Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$5(x + y + z)^2 \leq 5\left(\frac{9}{5} + 1\right)\left[\frac{5}{9}(x + z)^2 + y^2\right] = 14\left[\frac{5}{9}(x + z)^2 + y^2\right].$$

Kết hợp với giả thiết, ta suy ra $x^2 + z^2 \leq \frac{5}{9}(x + z)^2$, hay

$$(x - 2z)(2x - z) \leq 0.$$

Từ đây, ta có

$$\frac{z}{2} \leq x \leq 2z.$$

Suy ra

$$P = \frac{2x + z}{x + 2z} = 2 - \frac{3z}{x + 2z} \geq 2 - \frac{3z}{\frac{z}{2} + 2z} = \frac{4}{5}$$

và

$$P = 2 - \frac{3z}{x + 2z} \leq 2 - \frac{3z}{2z + 2z} = \frac{5}{4}.$$

Vậy $\frac{4}{5} \leq P \leq \frac{5}{4}$. Bất đẳng thức bên trái xảy ra dấu đẳng thức khi $z = 2x$ và $y = \frac{5}{3}x$. Bất đẳng thức bên phải đạt được dấu đẳng thức khi $x = 2z$ và $y = \frac{5}{3}z$. Tóm lại, giá trị lớn nhất của biểu thức P là $\frac{5}{4}$ và giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $\frac{4}{5}$. $\square$

Bình luận. Học sinh cần chứng minh lại bất đẳng thức Cauchy-Schwarz khi sử dụng.

Bài 4 (6.0 điểm). Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $AB < BC$, ngoại tiếp đường tròn tâm I . Hình chiếu vuông góc của điểm I trên các cạnh AB, AC theo thứ tự là M, N và hình chiếu vuông góc của điểm B trên cạnh AC là Q . Gọi D là điểm đối xứng của điểm A qua điểm Q , P là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BCD và R là giao điểm của hai đường thẳng MN, BQ . Chứng minh rằng

- a) Các tam giác BMR và BIP đồng dạng.
- b) Đường thẳng PR song song với đường thẳng AC .
- c) Đường thẳng MN đi qua trung điểm của đoạn thẳng AP .

Lời giải. a) Do AM và AN là các tiếp tuyến của đường tròn (I) nên $AM = AN$, suy ra tam giác AMN cân tại A . Từ đó

$$\angle BMR = 180^\circ - \angle AMN = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BAC) = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC.$$

c) Ta có

$$\angle RND = 180^\circ - \angle ANM = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BAC) = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC.$$

Lại có

$$\begin{aligned}\angle PDN &= \angle ADB + \angle BDP = \angle ADB + \frac{1}{2}\angle BDC \\ &= \angle ADB + \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ADB) = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle ADB \\ &= 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC.\end{aligned}$$

Do đó

$$\angle RND = \angle PDN.$$

Mặt khác, theo chứng minh câu b), ta có $PR \parallel DN$ nên tứ giác $DNRP$ là hình thang. Kết hợp với kết quả trên, ta suy ra tứ giác $DNRP$ là hình thang cân. Từ đó

$$\angle NPR = \angle DRP = \angle RDN. \quad (6)$$

Tam giác RAD có RQ vừa là đường trung tuyến vừa là đường cao nên cân tại R . Suy ra

$$\angle RDN = \angle RAN. \quad (7)$$

Từ (6) và (7), ta có $\angle RPN = \angle RAN$. Lại có $\angle NRP = \angle RNA$ (so le trong). Do đó

$$\angle RNP = 180^\circ - \angle NRP - \angle RPN = 180^\circ - \angle RNA - \angle RAN = \angle NRA.$$

Mà hai góc RNP và NRA ở vị trí so le trong nên $RA \parallel PN$. Tứ giác $ARNP$ có $PR \parallel AN$ và $AR \parallel NP$ nên là hình bình hành. Suy ra hai đường chéo RN và AP cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường. Vậy MN đi qua trung điểm của AP . $\square$

Bài 5 (1.0 điểm). Có 15 hộp rỗng. Mỗi bước, người ta chọn một số hộp rồi bỏ vào mỗi hộp một số viên bi sao cho số viên bi bỏ vào mỗi hộp là một lũy thừa của 2 và trong mỗi bước không có hai hộp nào có số bi được bỏ vào giống nhau. Tìm số nguyên dương k nhỏ nhất sao cho sau khi thực hiện k bước, tất cả các hộp đều có số bi giống nhau.

Lời giải. Giả sử sau k bước, mỗi hộp đều có n viên bi. Khi đó, số bi trong tất cả các hộp là $15n$.

Gọi 2^{m_i} là số viên bi nhiều nhất được bỏ vào một hộp nào đó ở bước thứ i ($1 \leq i \leq k$). Gọi m là số lớn nhất trong các số $m_1, m_2, \dots, m_k$. Khi đó, ở mỗi bước, số viên bi được bỏ vào tất cả các hộp không vượt quá $2^m + 2^{m-1} + \dots + 2^1 + 2^0 = 2^{m+1} - 1$. Suy ra, sau k bước, số viên bi trong tất cả các hộp không vượt quá $k(2^{m+1} - 1)$. Do đó

$$15n \leq k(2^{m+1} - 1) < k \cdot 2^{m+1}.$$

Mặt khác, dễ thấy $n \geq 2^m$ nên $15 \cdot 2^m \leq 15n < k \cdot 2^{m+1}$, suy ra $k > 7.5$. Vì k là số nguyên dương nên $k \geq 8$. Do đó, cần không ít hơn 8 bước để số bi trong tất cả các hộp đều bằng nhau.

Mặt khác, ta có thể thực hiện 8 bước bỏ bi vào các hộp như sau:

- **Bước 1:** $1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0$.
- **Bước 2:** $1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 0, 2^7, 0, 0, 0, 0, 0, 0$. Khi đó, số bi trong mỗi hộp lần lượt là $2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^7, 0, 0, 0, 0, 0, 0$.
- **Bước 3:** $2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 0, 0, 0, 2^7, 0, 0, 0, 0, 0$. Khi đó, số bi trong mỗi hộp lần lượt là $2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^7, 2^7, 2^7, 0, 0, 0, 0, 0$.
- ...
- **Bước 8:** $2^6, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2^7$. Khi đó, số bi trong mỗi hộp lần lượt là $2^7, 2^7, 2^7, 2^7, 2^7, 2^7, 2^7, 2^7, 2^7, 2^7, 2^7, 2^7, 2^7, 2^7$.

Vậy $k_{\min} = 8$.

□