

UBND HUYỆN YÊN MÔ
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ KHẢO SÁT HỌC SINH GIỎI LỚP 7
MÔN THI: TOÁN

NĂM HỌC 2023 - 2024

Thời gian làm bài: 120 phút

Đề thi gồm 05 câu, trong 02 trang

Câu 1. (4,0 điểm):

1. Thực hiện các phép tính sau:

a) $\sqrt{11^2 - 72} - 1\frac{1}{2} : \sqrt{\frac{25}{4} - \left(\frac{2023}{2024}\right)^0}$ b) $\left(\frac{-3}{7} + \frac{4}{11}\right) : \frac{7}{11} + \left(\frac{-4}{7} + \frac{7}{11}\right) : \frac{7}{11}$

c) $\frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 25^5 \cdot 49^2}{(125 \cdot 7)^3 + 5^9 \cdot 14^3}$

2. Cho biểu thức: $A = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{1000^2}$. Chứng minh rằng $A < \frac{25}{36}$.

Câu 2. (4,0 điểm):

1. Tính giá trị biểu thức $A = (x - 2y + z + 25)^{2024}$ biết $3x = 4y = 5z - 3x - 4y$
và $2x + y = z - 19$

2. Cho x, y là các số nguyên dương thỏa mãn $\frac{x+2y}{x+y} = \frac{2023}{2022}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của x .

Câu 3. (4,0 điểm):

1. Cho $\frac{x}{5} = \frac{y}{3} \neq 0$. Tính giá trị của biểu thức $M = \frac{3x^2 - 10y^2}{3x^2 + 5y^2}$

2. Tìm tất cả các cặp số nguyên x, y sao cho: $x + y - 2xy = 4$

3. Gieo ngẫu nhiên một con xúc xắc 1 lần, tìm xác suất của mỗi biến cố sau:

a) “Mặt xuất hiện của xúc xắc có số chấm là số nguyên tố”.

b) “Mặt xuất hiện của xúc xắc có số chấm là hợp số”.

Câu 4. (6,0 điểm):

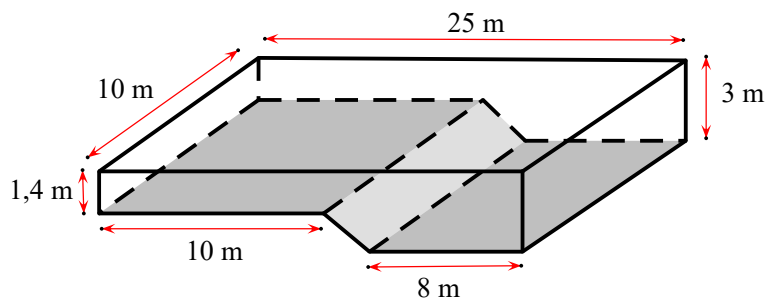
1. Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD và ACE. Gọi I là giao điểm BE và CD. Chứng minh rằng:

a) $\triangle ABE = \triangle ADC$.

b) $DE = BE$

c) $\widehat{EIC} = 60^\circ$ và IA là tia phân giác của $\widehat{DIE}$

2. Một bể bơi được xây dựng thành hai khu vực với độ sâu khác nhau cho trẻ em và người lớn và các kích thước của lòng bể được cho như hình vẽ.



Hỏi sau bao lâu bể bơi được bơm đầy nước, biết cứ mỗi phút máy bơm được vào bể 500 lít nước.

Câu 5. (2,0 điểm):

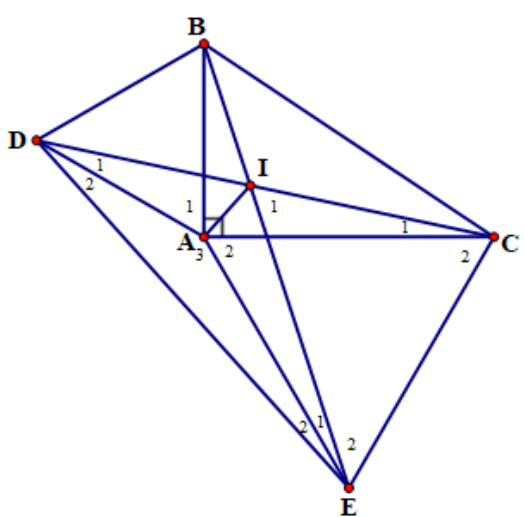
1. Mỗi ô vuông đơn vị của bảng kích thước 10×10 (10 dòng, 10 cột) được ghi một số nguyên dương không vượt quá 10 sao cho bất kỳ hai số nào ghi trong hai ô chung cạnh hoặc hai ô chung đỉnh của bảng là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng tồn tại một số được ghi ít nhất 17 lần.

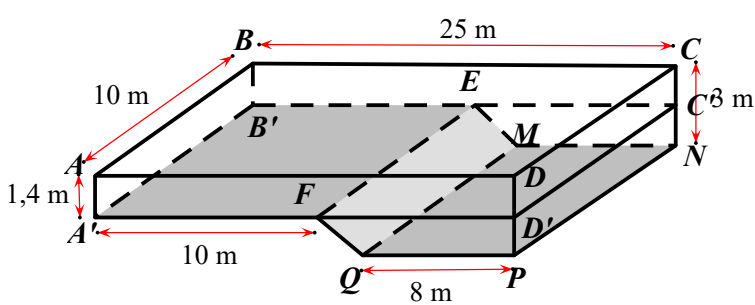
2. Chứng tỏ rằng $S = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \dots + \frac{n^2 - 1}{n^2}$ không là số tự nhiên với mọi $n \in \mathbb{N}, n > 2$.

-----**Hết**-----

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1 (4,0 điểm)	1. (3,0 điểm)	
	a) $\sqrt{11^2 - 72} - 1 \frac{1}{2} : \sqrt{\frac{25}{4}} - \left(\frac{2023}{2024}\right)^0$ $= \sqrt{121 - 72} - \frac{3}{2} : \frac{5}{2} - 1 = \sqrt{49} - \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{5} - 1$	0,5
	$= 7 - \frac{3}{5} - 1 = 6 - \frac{3}{5} = \frac{27}{5}$	0,5
	b) $A = \left(\frac{-3}{7} + \frac{4}{11}\right) : \frac{7}{11} + \left(\frac{-4}{7} + \frac{7}{11}\right) : \frac{7}{11}$ $= \left(\frac{-3}{7} + \frac{4}{11}\right) \cdot \frac{11}{7} + \left(\frac{-4}{7} + \frac{7}{11}\right) \cdot \frac{11}{7}$ $= \frac{11}{7} \left[\left(\frac{-3}{7} + \frac{4}{11}\right) + \left(\frac{-4}{7} + \frac{7}{11}\right) \right]$	0,5
	$= \frac{11}{7} \left[\left(\frac{-3}{7} + \frac{-4}{7}\right) + \left(\frac{4}{11} + \frac{7}{11}\right) \right]$ $= \frac{11}{7} [(-1) + 1] = \frac{11}{7} \cdot 0 = 0$	0,5
	c) $\frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 25^5 \cdot 49^2}{(125 \cdot 7)^3 + 5^9 \cdot 14^3}$ $= \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 2^{12} \cdot 3^4}{2^{12} \cdot 3^6} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 5^{10} \cdot 7^4}{5^9 \cdot 7^3 + 5^9 \cdot 7^3 \cdot 2^3}$ $= \frac{2^{12} \cdot 3^4 (3 - 1)}{2^{12} \cdot 3^6} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 (1 - 7)}{5^9 \cdot 7^3 (1 + 2^3)}$	0,5
	$= \frac{2^{12} \cdot 3^4 \cdot 2}{2^{12} \cdot 3^6} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 (-6)}{5^9 \cdot 7^3 \cdot 9}$ $= \frac{2}{3^2} - \frac{5 \cdot (-6)}{9} = \frac{2}{9} - \frac{-30}{9} = \frac{32}{9}$	0,5
	2. (1,0 điểm)	
	$A < \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{999 \cdot 1000}$	0,25
	$A < \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3} - \frac{1}{1000}$	0,25
	$A < \frac{25}{36} - \frac{1}{1000} < \frac{25}{36}$	0,25
	Vậy $A < \frac{25}{36}$	0,25
Câu 2	1. (2,0 điểm)	

(4,0 điểm)	Ta có: $3x = 4y = 5z - 3x - 4y$ $\Rightarrow \frac{3x}{1} = \frac{4y}{1} = \frac{5z - 3x - 4y}{1} = \frac{3x + 4y + 5z - 3x - 4y}{1 + 1 + 1} = \frac{5z}{3}$					0,5														
	$\Rightarrow \frac{3x}{1} = \frac{4y}{1} = \frac{5z}{3}$					0,25														
	$\Rightarrow \frac{x}{20} = \frac{y}{15} = \frac{z}{36}$					0,25														
	Lại có: $2x + y = z - 19 \Rightarrow 2x + y - z = -19$					0,25														
	Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có: $\frac{x}{20} = \frac{y}{15} = \frac{z}{36} = \frac{2x + y - z}{2.20 + 15 - 36} = \frac{-19}{19} = -1$					0,25														
	Suy ra: $x = -20; y = -15; z = -36$ Vậy $A = (-20 + 30 - 36 + 25)^{2024} = 1$					0,5														
	2. (2,0 điểm)																			
	Từ $\frac{x + 2y}{x + y} = \frac{2023}{2022}$ suy ra $\frac{x + 2y}{2023} = \frac{x + y}{2022}$					0,25														
	Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có: $\frac{x + 2y}{2023} = \frac{x + y}{2022} = \frac{(x + 2y) - (x + y)}{2023 - 2022} = y$					0,25														
	Khi đó: $x + y = 2022y$ Hay $x = 2021y$					0,5														
Để x đạt GTNN khi $2021y$ đạt GTNN.					0,5															
Mặt khác x, y là các số nguyên dương nên GTNN của y là 1.					0,25															
Khi đó GTNN của x là 2021.					0,25															
Câu 3 (4,0 điểm)	1. (1,5 điểm)																			
	Đặt $\frac{x}{5} = \frac{y}{3} = k, (k \neq 0) \Rightarrow x = 5k, y = 3k$.					0,5														
	Ta có $M = \frac{3x^2 - 10y^2}{3x^2 + 5y^2} = \frac{3(5k)^2 - 10(3k)^2}{3(5k)^2 + 5(3k)^2}$					0,25														
	$= \frac{75k^2 - 90k^2}{75k^2 + 45k^2} = \frac{-15k^2}{120k^2} = \frac{-1}{8}$ (vì $k \neq 0$).					0,75														
	2. (1,5 điểm)																			
	Ta có: $x + y - 2xy = 4$ suy ra $x - 2xy + y - 4 = 0$					0,25														
	$\Leftrightarrow 2x - 4xy + 2y - 8 = 0 \Leftrightarrow 2x - 4xy + 2y - 1 = 7$					0,25														
	$\Leftrightarrow 2x(1 - 2y) - (1 - 2y) = 7 \Leftrightarrow (2x - 1)(1 - 2y) = 7$					0,25														
	Lập bảng					0,5														
	<table><tr><td>$2x - 1$</td><td>1</td><td>7</td><td>-1</td><td>-7</td></tr><tr><td>$1 - 2y$</td><td>7</td><td>1</td><td>-7</td><td>-1</td></tr><tr><td>x</td><td>1</td><td>4</td><td>0</td><td>-3</td></tr></table>						$2x - 1$	1	7	-1	-7	$1 - 2y$	7	1	-7	-1	x	1	4	0
$2x - 1$	1	7	-1	-7																
$1 - 2y$	7	1	-7	-1																
x	1	4	0	-3																

	<table><tr><td>y</td><td>-3</td><td>0</td><td>4</td><td>1</td></tr><tr><td></td><td>Thỏa mãn</td><td>Thỏa mãn</td><td>Thỏa mãn</td><td>Thỏa mãn</td></tr></table>	y	-3	0	4	1		Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn	
y	-3	0	4	1								
	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn								
	Vậy $(x;y) \in \{(1;-3);(4; 0);(0;4);(-3; 1)\}$	0,25										
	3. (1,0 điểm)											
	a) Tập hợp gồm các kết quả có thể xảy ra đối với số chấm xuất hiện khi gieo xúc xắc là: $B = \{1;2;3;4;5;6\}$ Số phần tử của tập hợp B là 6. Có 3 kết quả thuận lợi cho biến cố “Mặt xuất hiện của xúc xắc có số chấm là số nguyên tố” là 2, 3, 5. Vì thế xác suất của biến cố đó là $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$	0,5										
	b) Có 2 kết quả thuận lợi cho biến cố “Mặt xuất hiện của xúc xắc có số chấm là hợp số” là 4, 6. Vì thế xác suất của biến cố đó là $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$	0,5										
Câu 4 (6,0 điểm)	1. (4,0 điểm)											
		0,5										
	a. (1,5 điểm)											
	Ta có: $\begin{cases} \widehat{DAC} = \widehat{A_1} + 90^0 = 60^0 + 90^0 = 150^0 \\ \widehat{BAE} = \widehat{A_2} + 90^0 = 60^0 + 90^0 = 150^0 \end{cases} \Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{BAE}$	0,75										
	Xét $\triangle ADC$ và $\triangle ABE$ có: $DA = BA$ (gt) $\widehat{DAC} = \widehat{BAE}$ (Chứng minh trên) $AC = AE$ (gt) $\Rightarrow \triangle ADC = \triangle ABE$ (c – g – c)	0,75										
	b. (1,0 điểm)											
	Ta có: $\widehat{A_3} + \widehat{A_1} + \widehat{BAC} + \widehat{A_2} = 360^0$ $\Leftrightarrow \widehat{A_3} + 60^0 + 90^0 + 60^0 = 360^0$ $\Leftrightarrow \widehat{A_3} = 150^0$	0,5										

	$\Rightarrow \widehat{A_3} = \widehat{BAE} = 150^\circ$	
	Xét $\triangle DAE$ và $\triangle BAE$ có: $DA = BA$ (gt) $\widehat{A_3} = \widehat{BAE}$ (Chứng minh trên) AE: Cạnh chung $\Rightarrow \triangle DAE = \triangle BAE$ (c - g - c) $\Rightarrow DE = BE$ (hai cạnh tương ứng)	0,5
	c. (1,5 điểm)	
	* Ta có: $\triangle DAC = \triangle BAE$ (CM câu a) $\Rightarrow \widehat{E_1} = \widehat{C_1}$ (hai góc tương ứng) Lại có: $\widehat{I_1} + \widehat{E_2} + \widehat{ICE} = 180^\circ$ (Tổng 3 góc trong $\triangle ICE$) $\Leftrightarrow \widehat{I_1} + (\widehat{AEC} - \widehat{E_1}) + (\widehat{C_1} + \widehat{C_2}) = 180^\circ$ $\Leftrightarrow \widehat{I_1} + 60^\circ - \widehat{E_1} + \widehat{C_1} + 60^\circ = 180^\circ$ $\Leftrightarrow \widehat{I_1} + 120^\circ = 180^\circ$ (Vì $\widehat{E_1} = \widehat{C_1}$) $\Leftrightarrow \widehat{I_1} = 60^\circ$	0,5
	* Vì $\triangle DAE = \triangle BAE$ (chứng minh câu b) $\Rightarrow \widehat{E_1} = \widehat{E_2}$ (hai góc tương ứng) $\Rightarrow EA$ là tia phân giác của $\widehat{DEI}$ (1) Vì $\begin{cases} \triangle DAC = \triangle BAE \\ \triangle DAE = \triangle BAE \end{cases} \Rightarrow \triangle DAC = \triangle DAE \Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{D_2}$ (Hai góc tương ứng) $\Rightarrow DA$ là tia phân giác của $\widehat{EDC}$ (2)	0,5
	Từ (1) và (2) $\Rightarrow IA$ là đường phân giác thứ ba trong $\triangle DIE$ hay IA là tia phân giác của $\widehat{DIE}$	0,5
	2. (2,0 điểm)	
	 Để tính thể tích bể bơi, ta tính thể tích hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ và hình lăng trụ đứng $EC'NM.FD'PQ$ có đáy là hình thang vuông. Thể tích hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ là: $10.25.1,4 = 350 \text{ (m}^3\text{)}$	0,5
	Thể tích hình lăng trụ đứng $EC'NM.FD'PQ$ là: $\frac{1}{2} \cdot [(25 - 10) + 8] \cdot (3 - 1,4) \cdot 10 = 184 \text{ (m}^3\text{)}$	0,5
	Thể tích bể bơi là: $350 + 184 = 534 \text{ (m}^3\text{)}$	0,25
	Đổi $534 \text{ m}^3 = 534 \text{ 000 lít}$	0,25
	Thời gian bể bơi được bơm đầy nước là:	0,25

	534 000 : 500 = 1 068 (phút)	
	Vậy sau 17 giờ 48 phút thì bể được bơm đầy nước.	0,25
Câu 5 (2,0 điểm)	1. (1,0 điểm)	
	Chia bảng lớn thành 25 hình vuông kích thước 2×2 . Do bất kỳ hai số nào ghi trong 2 ô chung cạnh hoặc hai ô chung đỉnh của bảng là hai số nguyên tố cùng nhau nên mỗi hình vuông nhỏ kích thước 2×2 chỉ có không quá một số chia hết cho 2 và có không quá một số chia hết cho 3	0,5
	Vì vậy 100 số ghi trong bảng, sẽ có không quá 25 số chia hết cho 2 và có không quá 25 số chia hết cho 3, nên còn ít nhất $100 - 25.2 = 50$ số nguyên tố cùng nhau với 2 và 3 mà không vượt quá 10.	0,25
	Suy ra 50 số này phải thuộc tập hợp $\{1; 5; 7\}$. Do $50 = 16.3 + 2$ nên theo nguyên lý Dirichlet tồn tại ít nhất $16 + 1 = 17$ số bằng nhau, tức là có ít nhất 1 số xuất hiện 17 lần trong bảng	0,25
	2. (1,0 điểm)	
	$S = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \dots + \frac{n^2 - 1}{n^2} = \frac{2^2 - 1}{2^2} + \frac{3^2 - 1}{3^2} + \frac{4^2 - 1}{4^2} + \dots + \frac{n^2 - 1}{n^2}$ $= 1 - \frac{1}{2^2} + 1 - \frac{1}{3^2} + 1 - \frac{1}{4^2} + \dots + 1 - \frac{1}{n^2}$ $= (1 + 1 + 1 + \dots + 1) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right)$ $= (n - 1) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) \Rightarrow S < n - 1 \quad (1)$	0,25
	Nhận xét: $\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1.2}; \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2.3}; \frac{1}{4^2} < \frac{1}{3.4}; \dots; \frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1).n}$ $\Rightarrow \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{(n-1).n} = 1 - \frac{1}{n} < 1.$	0,25
	$\Rightarrow - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) > -1 \Rightarrow (n - 1) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) > (n - 1) - 1 = n - 2 \Rightarrow S > n - 2 \quad (2)$	0,25
	Từ (1) và (2) suy ra $n - 2 < S < n - 1$ hay S không là số tự nhiên.	0,25

..... Hết