

(Đề thi có 01 trang)

Bài 1 (4,0 điểm)

1) Cho biểu thức: $P = \frac{x}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(1 - \sqrt{y})} - \frac{y}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} + 1)} - \frac{xy}{(\sqrt{x} + 1)(1 - \sqrt{y})}$.

a) Rút gọn P .

b) Tìm các giá trị nguyên của x, y để $P = 2$.

2) Trong cùng một hệ toạ độ cho đường thẳng $(d): y = x - 2$ và parabol $(P): y = -x^2$. Gọi A và B là giao điểm của (d) và (P) . Tìm m để $(d'): y = -x + m$ cắt (P) tại hai điểm C và D sao cho $CD = AB$.

Bài 2 (4,0 điểm)

1) Giải phương trình $3x^2 - x + \sqrt{3x^2 - 2} = x^3 + 2$.

2) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 - 3xy + 7x - 5y + 6 = 0 \\ 4x^2 - y^2 + 9x + 9 = \sqrt{2x + y + 2} + \sqrt{x + 4y + 1}. \end{cases}$$

Bài 3 (1,5 điểm)

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 2abc$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a(2a-1)^2} + \frac{1}{b(2b-1)^2} + \frac{1}{c(2c-1)^2} \geq \frac{1}{2}.$$

Bài 4 (2,5 điểm)

1) Giải phương trình nghiệm nguyên $x^3 - y^3 = xy + 8$.

2) Cho a, b, c là những số nguyên khác 0 thỏa mãn $a \neq c$ và $\frac{a}{c} = \frac{a^2 + b^2}{c^2 + b^2}$. Chứng minh $a^2 + b^2 + c^2$ không phải là số nguyên tố.

Bài 5 (6,0 điểm)

1) Cho nửa đường tròn (O, R) đường kính AB . Bán kính $OC \perp AB$. Điểm E thuộc đoạn OC .

Tia AE cắt nửa đường tròn (O) tại M . Tiếp tuyến của nửa đường tròn tại M cắt OC tại D .

a) Chứng minh: tứ giác $OEMB$ nội tiếp và $\triangle MDE$ cân.

b) Gọi BM cắt OC tại K . Chứng minh tích $BM \cdot BK$ không đổi khi E di chuyển trên OC và tìm vị trí của E để $MA = 2MB$.

c) Cho $\widehat{ABE} = 30^\circ$. Tính diện tích hình quạt MOB và chứng minh khi E di chuyển trên OC thì tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle CME$ thuộc một đường thẳng cố định.

2) Cho tam giác ABC nhọn. Chứng minh rằng $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$.

Bài 6 (2,0 điểm)

1) Cho đa giác đều 16 cạnh. Lấy ngẫu nhiên 3 đỉnh của đa giác đều. Tính xác suất để 3 đỉnh lấy được là ba đỉnh của một tam giác vuông không có cạnh nào là cạnh của đa giác đều.

2) Cho tập hợp $A = \{1; 2; 3; \dots; 100\}$ và 100 tấm thẻ. Người ta viết lên mỗi tấm thẻ một số thuộc tập hợp A sao cho tổng của các số trên một nhóm các tấm thẻ bất kỳ không chia hết cho 101. Chứng minh rằng tất cả các số được viết trên các tấm thẻ bằng nhau.

=====HẾT=====